16. 2. 2024

PVA EXPO PRAHA

Řešení

fykos.cz

fyziklani.cz

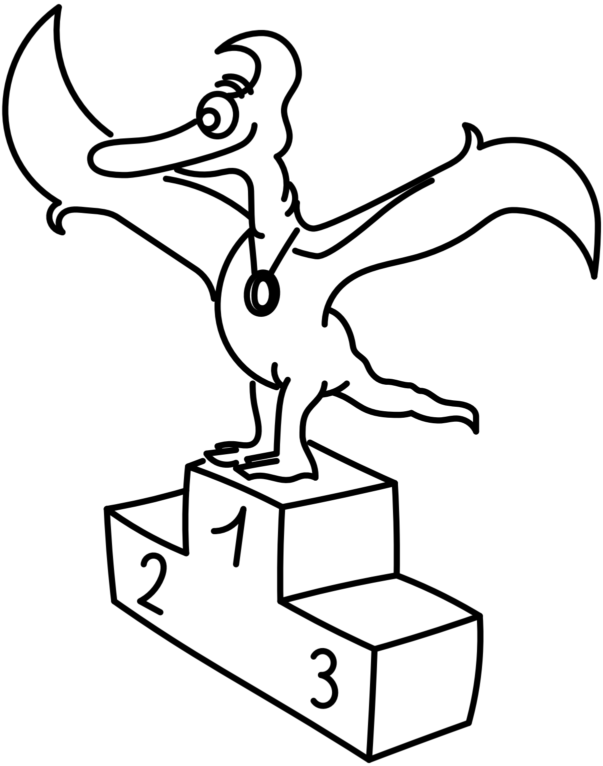
/fykos

@fykosak

Fyziklani2024

Řešení úloh

Fyziklani2024



Úloha AA ... medúSI

Vesmírný cestovatel Vojta narazil při svém bádání na planetu obývanou zvláštním druhem inteligentních medúz. Protože se něco takového jen tak nevidí, začal tento svět ihned zkoumat. Dozvěděl se například, že jsou zdejší obyvatelé velmi zdatní ve fyzice. Po chvíli pozorování zjistil, že jejich ekvivalent SI soustavy obsahuje mimo jiné veličiny napětí, náboj a frekvenci. Byl také schopen určit následující převodní vztahy.

$$\textit{napětí: } 1\,\wr \doteq 541\,\mathrm{V}\,, \quad \textit{náboj: } 1\,\circledast \doteq 0{,}301\,\mathrm{C}\,, \quad \textit{frekvence: } 1\smile\, \doteq 2{,}93\,\mathrm{Hz}\,.$$

Před odletem se jej jeden z obyvatel vyptával na jeho raketu. Vojta, který chtěl zapůsobit, mu nadšeně plánoval říct, že jeho raketa má výkon 800 GW – uvědomil si ale, že by mu medúza nerozuměla. Vyjádřete výkon Vojtovy rakety v jednotkách používaných medúzami.

Vojta chce žít jako medúza.

Naším cílem je vyjádřit jednotku výkonu, tedy watt, v nám dostupných jednotkách – ve voltech, coulombech a hertzích; jakmile totiž budeme znát toto vyjádření, můžeme postupovat podobně, jako bychom například převáděli metry za sekundu na míle za hodinu, a bude nám stačit dosadit převodní vztahy.

Abychom našli ono vyjádření wattu, potřebujeme v jistém smyslu porovnat *rozměry* jednotek, které máme k dispozici. Vše si vyjádříme nejprve v základních jednotkách soustavy SI.

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}{\cdot}A^{-1}}\,, \quad 1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A{\cdot}s}\,, \quad 1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s^{-1}}\,, \quad 1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}}\,.$$

Z těchto rozpisů není složité vidět, že platí $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V}\cdot 1\,\mathrm{C}\cdot 1\,\mathrm{Hz}$. Dosadíme-li mimozemské jednotky, dostáváme tak

$$1\,\mathrm{W} = \frac{1}{541}\,\wr\cdot\frac{1}{0{,}301}\,\circledast\cdot\frac{1}{2{,}93}\smile\, \doteq 0{,}00210\,\wr\cdot\circledast\cdot\smile\,.$$

Odsud už snadno dostáváme výsledek $800\,\mathrm{GW} \doteq 1{,}68\cdot 10^9\,\wr\cdot\circledast\cdot\smile$.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha AB ... koupání ve vaně

Danka si napouští vanu. Z kohoutku do ní přitečou $Q = 3{,}00\,\mathrm{dl{\cdot}s^{-1}}$. Nejvýše jak dlouho může Danka vanu napouštět, aby se do ní pak mohla celá ponořit a voda nepřetekla přes okraj vany? Vana má dno tvaru elipsy s hlavní poloosou délky $a = 70\,\mathrm{cm}$ a vedlejší poloosou délky $b = 35\,\mathrm{cm}$. Výška stěn vany je $h = 50\,\mathrm{cm}$ a stěny jsou kolmé na dno. Danka váží $m = 55\,\mathrm{kg}$. Uvažujte hustotu lidského těla po nadechnutí $\rho_\mathrm{D} = 945\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Výsledek uveďte ve tvaru mm:ss.

Danka si napouštěla vanu.

Objem vane spočítame ako súčin plochy jej podstavy a výšky vane. Keďže podstava má tvar elipsy, jej plochu spočítame podľa vzorčeka $S = \pi ab$. Potom objem vane je

$$V = \pi abh\,.$$

Objem Dankinho tela spočítame jednoducho ako

$$V_\mathrm{D} = \frac{m}{\rho_\mathrm{D}}\,.$$

Objem vody, ktorý môžeme do vane napustiť, je potom daný rozdielom objemov vane a Dankinho tela, teda

$$V_\mathrm{v} = V - V_\mathrm{D} = \pi abh - \frac{m}{\rho_\mathrm{D}}\,.$$

Zároveň platí $V_\mathrm{v} = Qt$, kde Q je objemový tok vody do vane a t je hľadaná doba napúšťania. Ak dáme do rovnosti posledné dve rovnice, stačí len vyjadriť hľadaný čas a výraz vyčísliť

$$t = \frac{V - V_\mathrm{D}}{Q} = \frac{\pi abh - \frac{m}{\rho_\mathrm{D}}}{Q}\,,$$

$$t \doteq 1090\,\mathrm{s} = 18\,\mathrm{min}\,10\,\mathrm{s}\,.$$

Danka môže napúšťať vaňu maximálne 18 minút a 10 sekúnd.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha AC ... panika na eskalátorech

Někdy se vám může stát, že jedete po eskalátorech a najednou si uvědomíte, že se potřebujete vrátit. Eskalátory jedou rychlostí $u = 0{,}65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a předpokládáme, že umíte dlouhodobě běžet $v = 6{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. V jaké největší vzdálenosti od začátku schodů se vám ještě vyplatí se otočit a běžet proti směru jízdy schodů dolů oproti tomu běžet nahoru a pak přejít na eskalátor, který jede dolů, a běžet po něm dolů? Výsledek chceme jako poměr k celkové délce eskalátorů.

Zanedbejte čas strávený přechodem na druhý eskalátor nahoře a pro jednoduchost předpokládejte, že běžíte stejně rychle nahoru i dolů (nahoru je to namáhavé, dolů si dáváte víc pozor) a že na schodech nejsou žádné překážky. *Karel přemýšlel, co udělat.*

Označme x hľadanú vzdialenosť od začiatku schodov a l dĺžku jedného eskalátora. Ďalej označme t_1 čas, ktorý človeku bude trvať otočiť sa a bežať dole proti pohybu schodov. V tomto prípade sa bude človek pohybovať voči zemi rýchlosťou $v - u$. Platí

$$t_1 = \frac{x}{v-u}\,.$$

Potom označme t_2 čas, ktorý mu bude trvať vybehnúť hore zvyšok eskalátoru, na ktorom práve stojí, rýchlosťou $v+u$ voči zemi, a potom zbehnúť dole po druhom eskalátore opäť rýchlosťou $v+u$. Teda

$$t_2 = \frac{l-x}{v+u} + \frac{l}{v+u} = \frac{2l-x}{v+u}\,.$$

V bode x sú časy t_1 a t_2 rovnaké. Stačí teda výrazy pre oba časy dať do rovnosti a vyjadriť pomer x/l

$$\begin{aligned}
\frac{x}{v-u} &= \frac{2l-x}{v+u}\,,\\
x(v+u) &= (2l-x)(v-u)\,,\\
x(v+u) + x(v-u) &= 2l(v-u)\,,\\
2xv &= 2l(v-u)\,,\\
\frac{x}{l} &= \frac{v-u}{v} = 1 - \frac{u}{v}\,,\\
\frac{x}{l} &= 0{,}61\,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že sa nám oplatí otočiť a vrátiť v prípade, že sa nachádzame maximálne vo vzdialenosti od začiatku schodov rovnej 0,61 dĺžky eskalátoru.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha AD ... ukládáme teplo do kapalin

Chtěli bychom ukládat energii do kapaliny tak, že ji zahřejeme o pevně daný teplotní rozdíl ΔT a pak ji uskladníme na určitý čas v tepelně izolované nádobě. Nádoba má omezený objem a chtěli bychom v ní uskladnit co nejvíce energie. Hodí se pro uskladnění energie lépe voda, nebo rtuť? Kolikrát? Jako výsledek odevzdejte poměr tepla uskladněného ve vodě k teplu uskladněnému ve rtuti. *Karel přemýšlel nad skladováním energie.*

Označme objem nádoby V. Pre každú z kvapalín môžeme určiť jej hmotnosť v nádobe z hustoty ρ ako $m = \rho V$. Teplo uskladnené kvapalinou v nádobe potom dostávame z kalorimetrickej rovnice ako

$$Q = mc\Delta T = \rho c V \Delta T\,,$$

kde c je merná tepelná kapacita danej kvapaliny. Pomer tepla uskladneného vo vode a ortuti dostávame ako

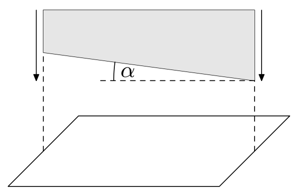
$$w = \frac{Q_{\mathrm{voda}}}{Q_{\mathrm{Hg}}} = \frac{\rho_{\mathrm{voda}} c_{\mathrm{voda}}}{\rho_{\mathrm{Hg}} c_{\mathrm{Hg}}}\,.$$

Použitím hodnôt $\rho_{\mathrm{voda}} = 0{,}998\,\mathrm{g{\cdot}ml^{-1}}$, $\rho_{\mathrm{Hg}} = 13{,}5\,\mathrm{g{\cdot}ml^{-1}}$, $c_{\mathrm{voda}} = 4{,}184\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, $c_{\mathrm{Hg}} = 0{,}14\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ dostávame hodnotu pomeru $w \doteq 2{,}21$. Vidíme teda, že použitím vody v nádobe uskladníme približne dvojnásobok energie v porovnaní s ortuťou.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha AE ... řezačka

Na velmi tenký papír pustíme shora z výšky $h = 8\,\mathrm{m}$ ostrý těžký přímý břit (jako v gilotině). Papír leží vodorovně, břit padá dolů a jeho spodní strana je zkosená vůči vodorovné rovině o úhel $\alpha = 4\cdot 10^{-5}\,\mathrm{mrad}$. Jakou rychlostí se pohybuje bod, ve kterém se papír rozřezává? Zanedbejte odporové síly a zpomalování břitu vlivem interakce s papírem.



Jarda dříve skládal vystřihovánky.

Svislá rychlost břitu bude ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 12{,}53\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Vodorovná rychlost bodu, kde se potkává břit s papírem, je (dobře viditelné na obrázku ze zadání)

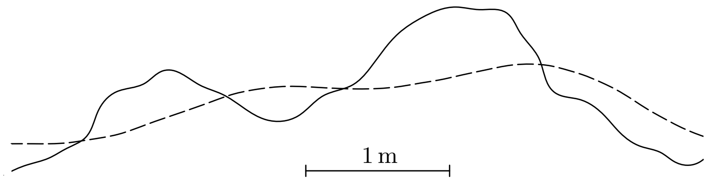
$$u = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha} = 3{,}13\cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Papír je tedy rozřezáván rychleji, než se pohybuje světlo. Výsledek však není fyzikálně nesmyslný, protože se touto rychlostí nešíří žádná informace. Kdyby byl navíc břit úplně zarovnaný s vodorovnou rovinou, byla by rychlost dokonce nekonečná!

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha AF ... pátrání po cyklistovi

Viktor se během FYKOSí párty rozhodl nadýchat trochu čerstvého vzduchu a vyrazil na kolo. Nikomu však nic neřekl a po chvíli se ho skupina dalších organizátorů rozhodla jít hledat. Ihned našli stopy kola ve sněhu a bylo jim jasné, že v tomto počasí by nikdo jiný než Viktor na kole nevyrazil. Pro jejich pátrání bylo nezbytné určit, kterým směrem jel, a jaká byla vzájemná vzdálenost středů (stejně velkých) kol jeho bicyklu. Určete tyto parametry z přiloženého obrázku stopy.



Viktorovo kolo pořád překáží v předsíňce.

Uvažujme, že bicykl má dvě stejná kola, z nichž přední se může volně otáčet, zatímco zadní je pevně ukotvené v rámu. Kvůli tomuto ukotvení protíná rovina tohoto kola střed předního kola. Směr zadního kola tedy musí být vždy k přednímu kolu. Tato úvaha platí nejen pro středy, ale také pro body dotyku kol se zemí. Proto tedy můžeme říct, že tečna stopy zadního kola v libovolném bodě směřuje vždy k bodu na stopě předního kola, a hlavně, že vzdálenost mezi těmito body je konstantní a rovna vzdálenosti obou kol.

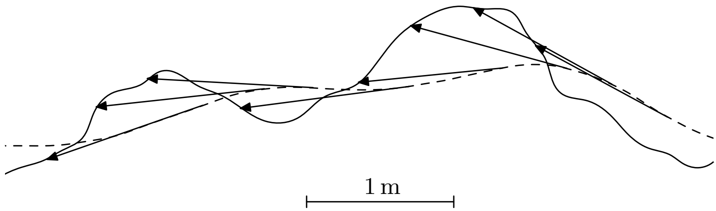
Uvažujme na chvíli, že přednímu kolu patří čárkovaná stopa, a zaměřme se na pravý horní oblouk plné stopy. Pokud by byl tento oblouk od zadního kola, musel by cyklista na pravé půlce oblouku jet zleva doprava, aby mohla tečna mířit ke druhé stopě. Analogicky by ale na levé půlce oblouku musel jet zprava doleva. Je tedy zřejmé, že zadnímu kolu patří čárkovaná stopa a přednímu plná.

Pokud by cyklista jel zleva doprava, tak hned na levé straně bychom zavedením tečny k čárkované čáře dostali úsečku, která by se s plnou čarou protla až na druhé straně obrázku (pokud vůbec). Jinde bychom naopak dostali vzdálenosti mnohem menší, a s uvážením měřítka tedy můžeme konstatovat, že tato možnost správně být nemůže. Cyklista tedy musel jet zprava doleva.

Pro změření vzdálenosti začneme přikládat pravítko z pravé strany. Zjistíme, že vzdálenost mezi koly je něco přes jeden metr. Tím tedy vyloučíme z dalších měření nesprávná data, která mohou vzniknout, když tečna protíná plnou čáru vícekrát.

Z jednoho měření ale vzhledem k rozměrům obrázku a nepřesnému určení tečny nemusíme najít správný výsledek. Abychom pravděpodobnost zvýšili, zopakujeme měření vícekrát na různých místech.

Naměřili jsme hodnoty 3,35 cm, 3,20 cm, 3,25 cm, 3,25 cm, 3,30 cm, 3,40 cm, 3,60 cm a délku měřítka 2,95 cm. Průměr hodnot je $(3{,}34 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$, což odpovídá vzdálenosti kol $(3{,}34 \pm \pm\, 0{,}05)/2{,}95\,\mathrm{m} = (113 \pm 2)\,\mathrm{cm}$. Správným výsledkem by mělo být 110 cm, trefili jsme se tedy poměrně dobře .



Obr. 1: Příklad možného řešení.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha AG ... čistá energie zítřka

Řízená štěpná reakce probíhá tak, že se neutrony slučují s jádry uranu-235, která se následně rozštěpí na lehčí prvky, a přitom uvolní další neutrony. Má to ale háček – reakce nejlépe probíhá při nízkých energiích neutronu (0,025 eV), zatímco neutrony uvolněné při štěpné reakci jsou rychlé (energie v řádu jednotek MeV). Proto se v jaderných reaktorech používá materiál na zpomalení neutronů, takzvaný moderátor. Ten musí vyhovět speciálním požadavkům – především mít lehká jádra, aby neutrony při elastických i neelastických srážkách ztrácely co nejvíce energie, a zároveň nesmí neutrony pohlcovat. V českých jaderných elektrárnách Temelín i Dukovany se jako moderátor používá voda, ve které neutrony zpomalují srážkami s jádry vodíku. Předpokládejte, že rychlý neutron prodělá pružnou srážku s nehybným jádrem vodíku. Jaké největší procento své kinetické energie může rychlý neutron při srážce ztratit, uvažujeme-li stejnou hmotnost protonu a neutronu?

Tuto úlohu vám přináší Skupina ČEZ. *Jindra se zamýšlel nad ztrátami energie.*

Látky používané jako moderátor jsou například voda (vodík), těžká voda (deuterium/těžký vodík) nebo grafit (uhlík). Jaderné reaktory v Temelíně a Dukovanech jsou tlakovodní reaktory. Tento typ reaktoru používá jako moderátor obyčejnou vodu. Výhodou vody jako moderátoru je její současné využití i k odvodu tepla z reaktoru k ohřevu vody v sekundárním chladicím obvodu. Pára v sekundárním obvodu následně roztáčí turbíny k výrobě elektrické energie. Vodní nádrž Dalešice slouží jako zdroj chladicí vody pro elektrárnu Dukovany a vodní nádrž Hněvkovice slouží jako zdroj chladicí vody pro elektrárnu Temelín. Zde je nutné zdůraznit, že voda z vodních nádrží se nepoužívá přímo v reaktoru jako moderátor, ale slouží ke zchlazení páry v sekundárním chladicím obvodu. Většina vodíku v molekulách vody je lehký vodík ${}^1_1\mathrm{H}$ s jedním protonem v jádru. Izotopu ${}^2_1\mathrm{H}$ (deuterium) s jedním protonem a jedním neutronem v jádru je přibližně jen 1 atom z 6400.

V částicové fyzice se běžně používá jednotka energie elektronvolt $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Používají se i násobky elektronvoltů kiloelektronvolt $1\,\mathrm{keV} = 1\,000\,\mathrm{eV}$, megaelektronvolt $1\,\mathrm{MeV} = = 1\,000\,000\,\mathrm{eV}$ a další. Klidová hmotnost protonu je $m_\mathrm{p} = 1{,}672\,6 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938{,}27\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$.

Klidová hmotnost neutronu je mírně vyšší $m_{\mathrm{n}} = 1{,}674\,9 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939{,}57\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$, ale při řešení této úlohy budeme uvažovat, že proton i neutron mají stejnou hmotnost. Tu jsme vyjádřili v jednotkách megaelektronvolt na rychlost světla na druhou, o které si můžete ověřit, že má rozměr hmotnosti $1\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}} = 1{,}783 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$.

V první řadě si musíme vyjasnit otázku, jestli je korektní počítat srážku neutronu s protonem v jádru vodíku a jestli nebude do průběhu srážky zasahovat i zbytek molekuly vody. Vazebná energie vazby H−O v molekule vody je 5,5 eV. Vazebná energie elektronu k jádru vodíku je 13,6 eV. Jestliže neutron přiletí s mnohem vyšší kinetickou energií, než jsou tyto dvě hodnoty, pak můžeme o jádru vodíku (protonu) uvažovat jako o volné částici, na kterou nemá zbytek molekuly vody vliv. Jelikož podle informací ze zadání se srážky účastní neutron (kinetická energie v řádu jednotek MeV), je v pořádku uvažovat o srážce neutronu s volným protonem.

Dále musíme ověřit, jestli se už náhodou nepohybujeme v režimu speciální relativity. Vztah pro relativistickou kinetickou energii je

$$E_{\mathrm{k}} = (\gamma - 1)mc^2\,, \tag{1}$$

kde γ je Lorentzův faktor, m je klidová hmotnost objektu a c je rychlost světla. Lorentzův faktor závisí na rychlosti objektu v podle vztahu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Jestliže člen $\gamma - 1$ ve vztahu (1) je mnohem menší než 1, pak částice není relativistická a můžeme použít vztah pro kinetickou energii z klasické fyziky

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Průměrný neutron uvolněný při štěpení jádra uranu-235 má kinetickou energii $E_{\mathrm{n,k}} \approx 2\,\mathrm{MeV}$. Platí pro něj

$$\gamma - 1 = \frac{E_{\mathrm{n,k}}}{m_{\mathrm{n}}c^2} \doteq 2{,}12 \cdot 10^{-3} \ll 1\,.$$

Tím pádem jej můžeme považovat za nerelativistickou částici.

Při pružné srážce neutronu s protonem se zachovává kinetická energie i hybnost. Jak bylo uvedeno v zadání, budeme při výpočtech uvažovat, že hmotnosti neutronu a protonu se rovnají $m_{\mathrm{n}} \approx m_{\mathrm{p}} = m_0$. Počáteční kinetická energie $T_{\mathrm{n},1}$ a hybnost $\mathbf{p}_{\mathrm{n},1}$ neutronu jsou

$$T_{\mathrm{n},1} = \frac{1}{2}m_0 v_{\mathrm{n},1}^2\,, \quad \mathbf{p}_{\mathrm{n},1} = m_0 \mathbf{v}_{\mathrm{n},1}\,,$$

kde $\mathbf{v}_{\mathrm{n},1} = (v_{\mathrm{n},1}; 0; 0)$ je rychlost neutronu, s jakou se přibližuje ke stacionárnímu protonu. Pro jednoduchost jsme kladný směr osy x zvolili rovnoběžně s vektorem rychlosti neutronu. Počáteční kinetická energie $T_{\mathrm{p},1} = 0$ a hybnost $\mathbf{p}_{\mathrm{p},1} = \mathbf{0}$ jsou nulové.

Po srážce neutron odletí s rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{n},2}$ a proton s rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{p},2}$. Tyto rychlosti musí vyhovovat soustavě rovnic

$$\frac{1}{2}m_0 v_{\mathrm{n},1}^2 = \frac{1}{2}m_0 v_{\mathrm{n},2}^2 + \frac{1}{2}m_0 v_{\mathrm{p},2}^2\,,$$
$$m_0 \mathbf{v}_{\mathrm{n},1} = m_0 \mathbf{v}_{\mathrm{n},2} + m_0 \mathbf{v}_{\mathrm{p},2}\,.$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení $\mathbf{v}_{\mathrm{n},2}$ a $\mathbf{v}_{\mathrm{p},2}$, ale nás zajímá jen to, kde neutron odletí s nejnižší kinetickou energií. A najít toto řešení není složité. Díky předpokladu o stejných hmotnostech protonu a neutronu můžeme v obou rovnicích vykrátit m_0, takže porovnáváme mezi sebou jen rychlosti. Rovnou vidíme triviální řešení $\mathbf{v}_{\mathrm{n},2} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{v}_{\mathrm{p},2} = \mathbf{v}_{\mathrm{n},1}$, v němž neutron ztratí veškerou svou kinetickou energii. Jelikož kinetická energie nemůže jít do záporu, je toto kýženou odpovědí na otázku, jaké největší procento své kinetické energie může neutron ztratit. Při ideální geometrii srážky neutron tedy ztratí veškerou svou energii, neboli 100 %.

Appendix: Obecné řešení pružné srážky dvou těles

V této úloze nám velice pomohlo, že jsme považovali hmotnosti protonu a neutronu za rovné. Jak bychom ale úlohu měli řešit, kdybychom vzali v potaz rozdílné hmotnosti částic? Co kdyby proton měl nenulovou počáteční rychlost?

Mějme částici A s hmotností m_A a počáteční rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{A},1}$ a částici B s hmotností m_B a počáteční rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{B},1}$. Tyto částice se srazí a po srážce odletí s rychlostmi $\mathbf{v}_{\mathrm{A},2}$ a $\mathbf{v}_{\mathrm{B},2}$. Při pružné srážce se zachovává kinetická energie i hybnost

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_{\mathrm{A},1}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}v_{\mathrm{B},1}^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_{\mathrm{A},2}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}v_{\mathrm{B},2}^2 \,,$$

$$m_\mathrm{A}\mathbf{v}_{\mathrm{A},1} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_{\mathrm{B},1} = m_\mathrm{A}\mathbf{v}_{\mathrm{A},2} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_{\mathrm{B},2} \,.$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení pro vektory rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{A},2}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{B},2}$ a není snadné identifikovat alespoň jedno řešení, natož to s nejmenší kinetickou energií odlétající částice A. Problém se velice zjednoduší, pokud přejdeme do vztažné soustavy spojené s těžištěm obou těles. Těžiště se v laboratorní soustavě pohybuje rychlostí

$$\mathbf{v}_\mathrm{t} = \frac{m_\mathrm{A}\mathbf{v}_{\mathrm{A},1} + m_\mathrm{B}\mathbf{v}_{\mathrm{B},1}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} \,.$$

Do těžišťové soustavy (rychlosti v ní budeme značit písmenem $\mathbf{u}$) přejdeme tak, že od rychlostí $\mathbf{v}$ vůči laboratorní soustavě odečteme rychlost těžiště

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\mathrm{t} \,. \tag{2}$$

V těžišťové soustavě je celková hybnost obou částic nulová

$$\mathbf{p}_\mathrm{t} = m_\mathrm{A}\mathbf{u}_{\mathrm{A},1} + m_\mathrm{B}\mathbf{u}_{\mathrm{B},1} = \mathbf{0} \,,$$

což si můžete ověřit dosazením za $\mathbf{u}$ ze vztahu (2). Vektory počátečních rychlostí částic $\mathbf{u}_{\mathrm{A},1}$, $\mathbf{u}_{\mathrm{B},1}$ leží na jedné přímce a míří proti sobě. Stejně tak i vektory koncových rychlostí $\mathbf{u}_{\mathrm{A},2}$, $\mathbf{u}_{\mathrm{B},2}$ leží na jedné přímce a míří od sebe, nejsou však nutně na stejné přímce jako počáteční rychlosti. Dvě přímky definují rovinu, tudíž srážka dvou částic v těžišťové soustavě je jev probíhající ve 2D rovině.

I v těžišťové soustavě se srážka řídí zákony zachování energie a hybnosti

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{A}u_{\mathrm{A},1}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}u_{\mathrm{B},1}^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{A}u_{\mathrm{A},2}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}u_{\mathrm{B},2}^2 \,,$$

$$m_\mathrm{A}\mathbf{u}_{\mathrm{A},1} + m_\mathrm{B}\mathbf{u}_{\mathrm{B},1} = m_\mathrm{A}\mathbf{u}_{\mathrm{A},2} + m_\mathrm{B}\mathbf{u}_{\mathrm{B},2} = \mathbf{0} \,.$$

Jediným přípustným řešením je, že velikosti počátečních a koncových rychlostí se rovnají

$$|\mathbf{u}_{\mathrm{A},1}| = |\mathbf{u}_{\mathrm{A},2}| = u_{\mathrm{A},1} = u_{\mathrm{A},2} \,, \quad |\mathbf{u}_{\mathrm{B},1}| = |\mathbf{u}_{\mathrm{B},2}| = u_{\mathrm{B},1} = u_{\mathrm{B},2} \,.$$

Směr vektoru koncové rychlosti je volným parametrem srážky. K jeho nalezení bychom potřebovali znát další informaci, jaký byl vektor impulsu síly při srážce. V těžišťové soustavě ale snadněji najdeme řešení, v němž částice A odlétá s nejmenší možnou kinetickou energií v laboratorní soustavě.

Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa x ležela rovnoběžně se směrem počátečních rychlostí částic a osa y ležela v rovině srážky. Počáteční a koncové rychlosti částic jsou

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\mathrm{A},1} &= u_A(1;0;0)\,,\\ \mathbf{u}_{\mathrm{B},1} &= u_B(-1;0;0)\,,\\ \mathbf{u}_{\mathrm{A},2} &= u_A(\cos\theta;\sin\theta;0)\,,\\ \mathbf{u}_{\mathrm{B},2} &= u_B(-\cos\theta;-\sin\theta;0)\,,\end{aligned}$$

kde θ je úhel, který svírají vektory koncové a počáteční rychlosti částice A.

V laboratorní vztažné soustavě bude částice A odlétat s rychlostí

$$\mathbf{v}_{\mathrm{A},2} = \mathbf{u}_{\mathrm{A},2} + \mathbf{v}_{\mathrm{t}}\,.$$

Kinetická energie částice A bude nejmenší, když kvadrát rychlosti

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{A},2}|^2 = (u_A\cos\theta + v_{\mathrm{t},x})^2 + (u_A\sin\theta + v_{\mathrm{t},y})^2$$

bude nejmenší. V tomto případě musejí být složky rychlosti těžiště $v_{\mathrm{t},x}$, $v_{\mathrm{t},y}$ vyjádřeny vůči osám těžišťové souřadnicové soustavy. Jinými slovy, počátek těžišťové souřadnicové soustavy se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{t}}$.

V případě neutronu s hmotností m_{n} zasahujícího stacionární proton s hmotností m_{p} je směr osy x v těžišťové soustavě stejný jako směr osy x v laboratorní soustavě, takže rychlost těžištové soustavy vůči laboratorní soustavě je

$$\mathbf{v}_{\mathrm{t}} = \frac{m_{\mathrm{n}}\mathbf{v}_{\mathrm{n},1}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}} = \frac{m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n},1}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}(1;0;0)\,.$$

Rychlost neutronu v těžišťové soustavě je

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_{\mathrm{n},1} - \mathbf{v}_{\mathrm{t}} = v_{\mathrm{n},1}(1;0;0) - \frac{m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n},1}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}(1;0;0) = \frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{n},1}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}(1;0;0)\,.$$

Kvadrát koncové rychlosti neutronu v laboratorní soustavě

$$|\mathbf{v}_{\mathrm{n},2}|^2 = (u_n\cos\theta + v_{\mathrm{t},x})^2 + (u_n\sin\theta + v_{\mathrm{t},y})^2 = \left(\frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{n},1}\cos\theta}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}} + \frac{m_{\mathrm{n}}v_{\mathrm{n},1}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}\right)^2 + \left(\frac{m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{n},1}\sin\theta}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}\right)^2$$

je nejmenší pro $\theta = 180^\circ$. Tím pádem největší množství kinetické energie neutron ztratí při čelní srážce, když v těžišťové soustavě otočí směr o 180°. Při započítání rozdílných hmotností neutronu a protonu by neutron ztratil maximálně

$$\eta = 1 - \left(\frac{m_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{n}}+m_{\mathrm{p}}}\right)^2 \doteq 99{,}999\,953\,\%$$

své kinetické energie.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha AH ... zrychli na křižovatce

Při poslední cestě autem Karel přemýšlel, kolik času by si ušetřil, pokud by zrychloval (i zpomaloval) s dvojnásobným zrychlením. Posčítáme-li všechny úseky, na kterých Karel jel stejným způsobem, zjistíme, že celkem:

- $t_0 = 9{,}0\,\mathrm{min}$ *stál,*
- $t_1 = 8{,}0\,\mathrm{min}$ *rovnoměrně zrychloval z* $v_0 = 0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *na* $v_{50} = 50{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$,
- $t_2 = 8{,}0\,\mathrm{min}$ *rovnoměrně zpomaloval z* v_{50} *na* v_0,
- $t_3 = 12{,}0\,\mathrm{min}$ *jel konstantní rychlostí* v_{50},
- $t_4 = 4{,}0\,\mathrm{min}$ *rovnoměrně zrychloval z* v_{50} *na* $v_{90} = 90{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$,
- $t_5 = 4{,}0\,\mathrm{min}$ *rovnoměrně zpomaloval z* v_{90} *na* v_{50} *a*
- $t_6 = 15{,}0\,\mathrm{min}$ *jel rovnoměrnou rychlostí* v_{90}.

Nezapomeňte, že má Karel urazit stejnou trasu (a platí tedy stejné rychlostní limity). Uvažujte také, že jsou všechny ostatní podmínky jízdy stejné (např. že se doba stání na křižovatkách nezmění a jinak je cesta volná) a že se Karel snaží jet v obou případech nejrychleji, jak mu to předpisy umožní. *Karel si říkal, jestli to má smysl.*

Původní celkovou dobu jízdy zjistíme snadno, a to jako

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 60\,\mathrm{min}\,.$$

Časy při druhé jízdě, kdy budeme zrychlovat s dvojnásobným zrychlením, budeme značit s čárkou. Hned první čas $t_0' = 9\,\mathrm{min}$ máme napsaný již v zadání, ten se totiž zřejmě nezmění.

Dále si uvědomíme, že pokud jedeme se zrychlením, tak obecně platí pro dráhu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\,,$$

kde v_0 je počáteční rychlost, a zrychlení a t čas. Pokud máme minimální a maximální rychlost mezi kterými zrychlujeme a musíme tímto zrychlováním strávit stejnou dobu, bude uražená dráha vždy stejná, ať už zrychlujeme jednou nebo vícekrát. To si můžeme ukázat z toho, že také platí

$$v = v_0 + at\,,$$

kde v je konečná rychlost po čase t. Pak vidíme, že pokud jsou v a v_0 konstantní a dobu t rozdělíme na N stejných časových úseků, musí být příslušné zrychlení rovno Na. Uražená dráha pak bude součtem drah

$$s = \sum_{i=1}^{N} \left(v_0 \frac{t}{N} + \frac{1}{2} N a \left(\frac{t}{N} \right)^2 \right) = N \left(\frac{1}{N} v_0 t + \frac{1}{N} \frac{1}{2} a t^2 \right) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\,,$$

což je tatáž dráha. To je důvod, proč bylo možné dát do zadání sečtené časy a nespecifikovat, v kolika místech ke zrychlování došlo. Na druhou stranu, pokud nejsme omezeni tím, že musíme zrychlovat daný čas, ale chceme zrychlit na nějaké dráze a máme k dispozici najednou dvakrát tak vysoké zrychlení, dojedeme o něco rychleji.

Budeme potřebovat znát dráhy, kde je omezení na $v_{50} = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a kde $v_{90} = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Z logiky zadání můžeme uvažovat, že omezení na $50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ je na dráze uražené za doby t_1, t_2 a t_3, limit na $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ pak u t_4, t_5 a t_5.

Dráha uražená za čas t_1 a t_2 je stejná (je jedno, pokud zrychlujeme z jedné rychlosti na druhou či z druhé zpomalujeme na první, když jsou časy zrychlování i zpomalování stejné). Počáteční rychlost je nulová, tedy se vztah zjednodušuje a dostáváme

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2}\frac{v_{50}}{t_1}t_1^2 = \frac{1}{2}v_{50}t_1 \doteq 3{,}3\,\mathrm{km}\,.$$

Dráhu uraženou za čas t_3 dostáváme jako

$$s_3 = v_{50}t_3 = 10\,\mathrm{km}\,.$$

Obdobně bude stejná dráha uražená za časy t_4 a t_5

$$s_4 = s_5 = v_{50}t_4 + \frac{1}{2}\frac{v_{90}-v_{50}}{t_4}t_4^2 = \frac{1}{2}\left(v_{90}+v_{50}\right)t_4 \doteq 4{,}7\,\mathrm{km}\,.$$

Opět jednoduše dostáváme poslední část dráhy

$$s_6 = v_{90}t_6 = 22{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Úseky s nejvyššími povolenými rychlostmi v_{50}, resp. v_{90} pak jsou

$$\begin{aligned} s_{50} &= s_1 + s_2 + s_3 = v_{50}\left(t_1 + t_3\right) \doteq 16{,}7\,\mathrm{km}\,,\\ s_{90} &= s_4 + s_5 + s_6 = v_{50}t_4 + v_{90}\left(t_4 + t_6\right) \doteq 31{,}8\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

Nyní už můžeme začít řešit situaci s dvojnásobným zrychlením. Čas, ve kterém zrychlujeme na v_{50} se zkrátí na

$$t_1' = \frac{v_{50}}{2a} = \frac{1}{2}t_1 = t_2' = 4\,\mathrm{min}\,,$$

tedy na polovinu. Stejně tak v případě zrychlování z v_{50} na v_{90}

$$t_4' = \frac{v_{90}-v_{50}}{2a} = \frac{1}{2}t_4 = t_5' = 2\,\mathrm{min}\,.$$

Nicméně ještě musíme dopočítat, jakou dobu pojedeme rychlostí v_{50} a jakou dobu v_{90} – za tím účelem v obou případech nejprve určíme dráhu, kterou jsme urazili na těchto úsecích při zrychlování

$$\begin{aligned} s_1' &= s_2' = \frac{1}{2}\frac{v_{50}}{t_1'}{t_1'}^2 = \frac{1}{2}v_{50}t_1' = \frac{1}{4}v_{50}t_1 \doteq 1{,}7\,\mathrm{km}\,,\\ s_4' &= s_5' = v_{50}t_4' + \frac{1}{2}\frac{v_{90}-v_{50}}{t_4'}{t_4'}^2 = \frac{1}{2}\left(v_{90}+v_{50}\right)t_4' = \frac{1}{4}\left(v_{90}+v_{50}\right)t_4 \doteq 2{,}3\,\mathrm{km}\,, \end{aligned}$$

a poté dopočítáme dráhy a časy, ve kterých bychom jeli s konstantními rychlostmi

$$\begin{aligned} s_3' &= s_1 + s_2 + s_3 - s_1' - s_2' = v_{50}\left(\frac{1}{2}t_1 + t_3\right)\,,\\ s_6' &= s_4 + s_5 + s_6 - s_4' - s_5' = \frac{1}{2}v_{50}t_4 + v_{90}\left(\frac{1}{2}t_4 + t_6\right)\,,\\ t_3' &= \frac{s_3'}{v_{50}} = \frac{1}{2}t_1 + t_3 = 16\,\mathrm{min}\,,\\ t_6' &= \frac{s_6'}{v_{90}} = \frac{1}{2}\frac{v_{50}}{v_{90}}t_4 + \frac{1}{2}t_4 + t_6 \doteq 18{,}1\,\mathrm{min}\,, \end{aligned}$$

Celkový čas je

$$T' = t'_0 + t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 + t'_5 + t'_6 \doteq 55{,}1\,\mathrm{min}\,,$$

tedy rozdíl, na který se nás ptá zadání, spočteme jako

$$\Delta T = T - T' = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_4\left(1 - \frac{v_{50}}{v_{90}}\right)\right) \doteq 4{,}9\,\mathrm{min}\,.$$

Jízdou na stejné trase s použitím dvojnásobného zrychlení motoru nám ušetří cca 4,9 min času, tedy zhruba 8 %. Vše platí za předpokladu, že budeme jinak čekat stejné doby a budeme moci volně zrychlovat a zpomalovat.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BA ... osamělý malý princ

Malý princ se na svojí planetce B 612 nudil, tak ho napadlo, že si začne sám se sebou házet míčem. Hází ho z výšky 1,5 m nad povrchem a ve stejné výšce jej chce také chytit po tom, co míč obletí kolem celé planetky. Jak dlouho bude trvat jeden takový hod? Předpokládejte, že planetka B 612 má poloměr 10 m a její hustota je stejná jako hustota Země.

Terce chyběli lidi.

Protože malý princ chce chytit míč ve stejné výšce, jako byla ta, ze které jej vyhodil, použijeme vztah pro kruhovou rychlost

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost planetky, kolem které míč obíhá kruhovou rychlostí, a r vzdálenost od jejího středu. Hmotnost planetky malého prince můžeme vypočítat pomocí faktu, že má stejnou hustotu jako Země

$$\begin{aligned}
\rho_\mathrm{p} &= \rho_\mathrm{Z}\,,\\
\frac{m_\mathrm{p}}{V_\mathrm{p}} &= \frac{m_\mathrm{Z}}{V_\mathrm{Z}}\,,\\
m_\mathrm{p} &= m_\mathrm{Z}\frac{\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{p}^3}{\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{Z}^3}\,,\\
m_\mathrm{p} &= m_\mathrm{Z}\left(\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{Z}}\right)^3\,.
\end{aligned}$$

Poslední vztah, který se nám bude hodit, je doba jednoho oběhu rychlostí v po kruhové trajektorii o poloměru r

$$t = \frac{2\pi r}{v}\,.$$

Po dosazení všech známých vztahů do posledního vzorce získáme rovnici

$$t = \frac{2\pi\left(r_\mathrm{p} + r_0\right)}{\sqrt{\frac{G m_\mathrm{Z}\left(r_\mathrm{p}/r_\mathrm{Z}\right)^3}{r_\mathrm{p}+r_0}}}\,,$$

kde r_0 je výška nad povrchem, ze které malý princ hází míč. Tento vztah můžeme po úpravě zapsat jako

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_Z}} \left(\frac{r_Z \left(r_p + r_0 \right)}{r_p} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

Zde si můžeme povšimnout, že pokud bychom házeli z nulové výšky nad povrchem planetky, vůbec by nezáleželo na jejím poloměru a čas oběhu by byl pro všechna tělesa se stejnou hustotou shodný.

Nakonec nám zbývá už jen dosadit konkrétní hodnoty. Doba jednoho obletu míče kolem planetky malého prince v tomto případě bude

$$t = 6\,251\,\mathrm{s} \doteq 1{,}7\,\mathrm{h} .$$

Tereza Voltrová
`tereza.voltrova@fykos.cz`

Úloha BB ... odpudivý David

David odpuzuje holky. Rozhodl se tedy nabít nábojem $0{,}001\,\mathrm{C}$*. Jaký náboj by musela mít holka, aby elektrická síla byla větší než Davidova odpudivá síla, která je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti s konstantou úměrnosti* $160\,\mathrm{N{\cdot}m^2}$*?* *David si nemůže najít holku.*

Protože je Davidova odpudivá síla nepřímo úměrná vzdálenosti, můžeme ji psát ve tvaru $F_{\mathrm{David}} = \varphi/r^2$, kde φ je konstanta ze zadání. Zajímá nás, kdy nastane rovnost sil $F_{\mathrm{David}} = F_C$. Rozepíšeme tedy vzorec na

$$\frac{\varphi}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} .$$

Potřebujeme vypočítat q_2, a protože se stejné náboje odpuzují, vyjde q_2 záporná. Díky tomu se můžeme zbavit absolutní hodnoty a upravit vzorec do tvaru

$$q_2 = -\frac{4\pi\varepsilon_0\varphi}{q_1} = -1{,}78 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C} .$$

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha BC ... studentská

Jakou minimální délku musí mít měděný drát, abychom ho mohli použít na topení? V zásuvce je střídavé napětí $230\,\mathrm{V}$ *a průřez drátu činí* $5\,\mathrm{mm^2}$*. Našimi jističi protéká proud nejvýše* $6\,\mathrm{A}$*. Měrný elektrický odpor mědi je* $0{,}0178\,\Omega{\cdot}\mathrm{mm^2}{\cdot}\mathrm{m^{-1}}$*.* *Lukáš si stěžoval, že má na pokoji zimu.*

Nejdříve vypočítáme, při jakém odporu bude protékat proud $6\,\mathrm{A}$. Pomocí Ohmova zákona dostaneme

$$R = \frac{U}{I} .$$

Následně určíme, jak musí být dlouhý drát, aby měl požadovaný odpor

$$R = \rho \frac{l}{S}\,,$$

kde ρ je měrný elektrický odpor mědi, S průřez drátu a l hledaná délka. Porovnáním rovnic získáme

$$\rho \frac{l}{S} = \frac{U}{I}\,.$$

Ze vztahu výše vyjádříme l a dosadíme zadané hodnoty

$$l = \frac{S}{\rho}\frac{U}{I} = 10{,}8\,\mathrm{km}\,.$$

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha BD ... pružinová rozcvička

Danka s Danem používají na posilování rukou jednoduchý stroj – dvě madla (zanedbatelné délky) spojená paralelně zapojenými pružinami, jejichž počet můžeme snadno měnit. Všechny používané pružiny mají tuhost k a klidovou délku l_0. Když Danka působí silou F a má ve stroji 2 pružiny, podaří se jí stroj roztáhnout na celkovou délku l_1. Na jakou celkovou délku roztáhne stroj silnější Dano, který si do něj zapojí 3 pružiny a působí na něj silou $2F$? Výsledek vyjádřete pouze pomocí l_0 a l_1. *Karel chtěl úlohu na cvičení.*

Základní obecný vztah mezi silou působící na pružinu F, tuhostí pružiny k a jejím prodloužením Δl je

$$\Delta l = \frac{F}{k}\,.$$

Máme-li zapojené pružiny paralelně, síla se mezi nimi rozkládá. Tedy pokud pomocí madel všechny pružiny o stejné tuhosti prodlužujeme o stejnou délku, síla se mezi ně rozloží rovnoměrně a jejich tuhosti se budou efektivně sčítat. Jinak řečeno, pro prodloužení v případě Danky platí

$$\Delta l_1 = \frac{F}{2k}\,,$$

a v případě Dana pak

$$\Delta l_2 = \frac{2F}{3k}\,.$$

Nicméně máme zadáno, že máme využít pouze klidovou délku l_0 a délku, na kterou pružinu roztáhla Danka l_1. Pro ni platí

$$l_1 = l_0 + \Delta l_1 = l_0 + \frac{1}{2}\frac{F}{k}\,.$$

Chceme znát celkovou délku Danovy pružiny, tedy hodnotu

$$l_2 = l_0 + \Delta l_2 = l_0 + \frac{2}{3}\frac{F}{k}\,.$$

Abychom odpověď dostali v požadovaných délkách vyjádříme F/k ze vztahu pro l_1 a dosadíme do vztahu pro l_2

$$l_2 = l_0 + \frac{2}{3} \cdot 2\left(l_1 - l_0\right) \,.$$

Po drobné úpravě se dostáváme již k odpovědi, že celková délka pružin je v případě, kdy cvičí Dano

$$l_2 = \frac{4}{3} l_1 - \frac{1}{3} l_0 \,.$$

Na úplný závěr ještě poznamenejme, že přesně jak zadání požadovalo, pro vyjádření nepotřebujeme znát absolutní tuhost ani jedné pružiny – stačila nám pouze informace, že jsou tyto tuhosti stejné.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BE ... tahači na letišti

Na letišti jezdí posunovací vozidla, která dokážou pohnout s velkými dopravními letadly až o hmotnosti M. Jestliže je hmotnost posunovacího vozidla m a tření mezi jeho koly a ranvejí je f, s jakým maximálním zrychlením se může rozjíždět, aby nepodkluzoval, jestliže za sebou tahá letadlo? *Na letišti v Medlánkách prý urychluje letadla traktor.*

Uvažujme, že tahač dokáže na sebe a na letadlo působit celkovou silou F. Pak se oba budou podle druhého Newtonova zákona rozjíždět se zrychlením

$$a = \frac{F}{M + m} \,.$$

Nyní se zamysleme, jaká je tato maximální vodorovná síla. Ze zákona akce a reakce musí síla F vzniknout v reakci na nějakou jinou vodorovnou sílu, která působí mezi tahačem a ranvejí, po které se pohybuje. Jedinou takovou silou je tření mezi koly tahače a povrchem pod nimi. Maximální velikost třecí síly je dána jako $F_\mathrm{t} = fN$, kde N je normálová síla, která působí na tahač kolmo k podložce, a f koeficient tření. Normálová síla odpovídá v tomto případě tíhové síle působící na tahač, tedy $N = mg$. Celkově tedy máme

$$F_\mathrm{t} = fN = fmg = F \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_\mathrm{t}}{M + m} = \frac{mgf}{M + m} \,.$$

Kdyby tahač dokázal svá kola roztáčet s větším úhlovým zrychlením, než plyne z našeho nalezeného, začala by se po ranveji smýkat a třecí síla by se nezvětšila, takže by to na našem výsledku nic nezměnilo.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BF ... nuda v metru

Pepa se po cestě ze školy metrem začal nudit. Vytáhl si z kapsy matematické kyvadlo se závěsem dlouhým $1{,}002\,\mathrm{m}$ a závažím o hmotnosti $1{,}103\,\mathrm{kg}$, které zavěsil za strop vagónu metra. O kolik větší periodu malých kmitů matematického kyvadla naměří při rozjezdu metra oproti periodě, kterou by naměřil v zastávce? Vlak metra rozjíždí se zrychlením $2{,}350\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Pepa se v metru opravdu nudil.

Na kyvadlo působí ve vertikálním směru tíhové zrychlení g a ve směru horizontálním setrvačné zrychlení a. Celkové zrychlení bude jejich vektorový součet a', který díky kolmosti spočítáme jednoduše pomocí Pythagorovy věty

$$a' = \sqrt{g^2 + a^2}\,.$$

Periodu malých kmitů metra v zastávce určíme dle známého vzorce pro periodu matematického kyvadla

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Pro periodu při rozjezdu však místo g musíme dosadit zrychlení a', čímž získáme výsledek

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}\,.$$

Odsud

$$T_2 - T_1 \doteq -0{,}028\,\mathrm{s}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha BG ... Titanic

Kovová loďka se dvěma pasažéry, která má celkovou hmotnost $m = 210\,\mathrm{kg}$ a tvar kvádru o rozměrech $2{,}0\,\mathrm{m} \times 0{,}8\,\mathrm{m} \times 0{,}5\,\mathrm{m}$ (nejmenší rozměr je samozřejmě vertikálně), plave na hladině rybníka. Po útoku krokodýla se však uprostřed podstavy loďky objevila trhlina o průřezu $A = 10\,\mathrm{cm}^2$ a dovnitř začala téct voda. Jaký čas zbývá pasažérům, než se s loďkou zcela potopí?

Jarda viděl v Brně krokodýla.

Řešení přes Bernoulliho a Archimeda

Voda do loďky vniká rychlostí $v = \sqrt{2g\Delta h}$, přičemž $\Delta h = h_2 - h_1$ je rozdíl výšek hladiny rybníka a hladiny vody v loďce. Výška vody v loďce je h_1 a dno loďky se nachází h_2 pod hladinou rybníka.

Z Archimédova zákona jednoduše spočítáme, jaká musí být h_2 v závislosti na hmotnosti vody v loďce. Tíhová síla je $F_\mathrm{g} = (m + V\rho)\,g = (m + Sh_1\rho)\,g$, kde V je objem vody v loďce, ρ je její hustota a $S = 1{,}6\,\mathrm{m}^2$ je průřez loďky, působí směrem dolů. Tíhová síla je vyrovnávána vztlakovou silou, která má velikost $F_\mathrm{v} = Sh_2\rho g$.

Platí tedy

$$(m + Sh_1\rho)\,g = Sh_2\rho g \quad \Rightarrow \quad \Delta h = h_2 - h_1 = \frac{m}{S\rho}\,.$$

Je tedy zřejmé, že rychlost průtoku vody do loďky je v čase konstantní. Loďka se potopí, jakmile bude $h_2 = c = 0{,}5\,\mathrm{m}$, tedy voda se dostane do loďky vrchní stranou. To nastává pro výšku hladiny v loďce

$$h_1 = c - \Delta h = c - \frac{m}{S\rho}\,.$$

Objem vody v loďce je v této chvíli $Sh_1 = Avt$ a je roven součinu konstantního objemového průtoku a času. Odtud již můžeme vyjádřit hledaný čas jako

$$t = \frac{Sh_1}{Av} = \frac{abc - \frac{m}{\rho}}{A\sqrt{2g\frac{m}{ab\rho}}} = 367\,\mathrm{s}\,.$$

Riešenie čisto cez zákon zachovania energie

Ako sa premieňa energia počas potápania? Potenciálna energia lode klesá a premieňa sa primárne na kinetickú energiu vody, ktorá strieka dierou do lode. Keď sa voda dostane do lode, jej kinetická energia sa postupne premení na teplo, to nás už zaujímať nebude. Použijeme teda rovnosť medzi zmenou potenciálnej energie loďky a kinetickej energie vody.

Označme rýchlosť klesania lode v_L, potom za čas $\mathrm{d}t$ klesne jej potenciálna energia o $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -mgv_\mathrm{L}\,\mathrm{d}t$. Týmto posunom sa zároveň loď dostala na miesto, kde predtým bola voda, konkrétne objem $\mathrm{d}V = Sv_\mathrm{L}\,\mathrm{d}t$ vody. Táto voda sa musí dostať do lode cez dieru A za čas $\mathrm{d}t$, čiže musí mať rýchlosť

$$v = \frac{\mathrm{d}V}{A\,\mathrm{d}t} = \frac{S}{A}v_\mathrm{L}\,,$$

čo dáva zmysel.

Čiže kinetická energia vody narastie za čas $\mathrm{d}t$ o

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}V\rho v^2 = \frac{1}{2}A\rho v^3\,\mathrm{d}t\,.$$

Položíme zmeny energie rovné a vyjadríme rýchlosť vtekania vody v

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = -\,\mathrm{d}E_\mathrm{p}\,,$$
$$\frac{1}{2}A\rho v^3\,\mathrm{d}t = mgv\frac{A}{S}\,\mathrm{d}t\,,$$
$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S}}\,,$$

čo sa zhoduje s riešením cez Bernoulliho a Archimeda. Tiež z toho môžeme dostať rýchlosť klesania lode $v_\mathrm{L} = vA/S$ a následne dopočítať čas, za ktorý sa loď potopí ako v predchádzajúcom postupe, čím znova dostaneme $t = 367\,\mathrm{s}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha BH ... kladky s hmotným lanem

Mějme kladku se zanedbatelným poloměrem, přes kterou je přehozené lano délky L. Na jednom konci lana visí kvádr o hmotnosti m_1 a na druhém konci kvádr o hmotnosti m_2. S jakým zrychlením bude kvádr m_1 zrychlovat směrem dolů v momentě, kdy soustavu pustíme? V momentě *puštění je lano umístěné symetricky vzhledem ke kladce. Lano má homogenní délkovou hustotu a celkovou hmotnost m. Tření ani hmotnost kladky neuvažujte.*

Lego si říkal, že by se patřilo něco takového jednou zadat.

Riešenie intuíciou

Nakoľko lano je umiestnené symetricky, nebude jeho tiaž spôsobovať žiadne zrýchlenie (zložky od oboch jeho častí sa akurát vyrušia). Tým pádom nás bude zaujímať iba zotrvačné pôsobenie jeho hmotnosti: celá sústava, ktorá sa začína pohybovať, bude vážiť o m viacej.

Keby bolo lano nehmotné, zrýchlenie by bolo

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,,$$

keď potrebujeme urýchliť o m hmotnosti viacej, musí byť zrýchlenie

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m}\,.$$

Ďalší intuitívny spôsob ako na tento výsledok pozerať je, že sme vlastne pridali hmotnosť $m/2$ k obom stranám (lebo lano je rozložené symetricky). To sa v čitateli vyruší a v menovateli sčíta na m. Čiže všetko dáva zmysel, hotovo.

Poctivé riešenie

Na každý element lana pôsobia tri sily: tiažová veľkosti $\mathrm{d}mg$, ťahová od zvyšku lana jedným smerom a ťahová od druhého zvyšku lana druhým smerom (resp. ťahová sila od dvoch susediacich elementov). Z tretieho Newtonovho zákona pritom vyplýva, že rovnako veľkými silami opačných smerov pôsobí zas tento element na svojich dvoch susedov. Z toho vyplýva, že sa oplatí zaviesť si veličinu „napätie“ $T(x)$ závislú na polohe v lane, ktorá nám hovorí, ako silou sa ťahajú elementy lana v danom bode. Navyše, ak má element lana dĺžku $\mathrm{d}x$, môžeme z rozvoja do prvého rádu dostať výslednú silu od zvyšku lana, pôsobiacu na tento element

$$\mathrm{d}F_T(x) = T(x + \mathrm{d}x) - T(x) = T(x) + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} - T(x) = \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

Lano má homogénnu dĺžkovú hustotu, čiže medzi dĺžkou elementu $\mathrm{d}x$ a hmotnosťou elementu $\mathrm{d}m$ je lineárny vzťah $\mathrm{d}m = \mathrm{d}xm/L$.

Pre každý element musí platiť pohybová rovnica, čiže celková sila sa musí rovnať súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}ma &= \pm\,\mathrm{d}mg + \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\\
\mathrm{d}x\frac{m}{L}a \pm \mathrm{d}x\frac{m}{L}g &= \mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\\
\frac{m}{L}(a \pm g) &= \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\,,
\end{aligned}$$

čo je diferenciálna rovnica pre napätie $T(x)$ v závislosti od polohy v lane x, kde $x = 0$ je bod kontaktu so závažím m_2 a $x = L$ so závažím m_1. Celé lano zrýchľuje s rovnako veľkým zrýchlením, ktoré uprostred otočí smer v priestore, ale z hľadiska lana ide stále „rovnako" (čiže buď v smere rastúceho alebo klesajúceho x), čiže a je konštanta. Konkrétne kladné a znamená zrýchľovanie v smere rastúceho x, čiže prípad, keď m_1 zrýchľuje nadol. Pred tiažou je $\pm$, pretože v polke kde $x < L/2$ tiaž ťahá v smere klesajúceho x a v druhej polke ($x > L/2$) ťahá v smere rastúceho x. Čiže konkrétnejšie by sme mohli namiesto $\pm$ v poslednej rovnici písať $\operatorname{sgn}(L/2-x)$ (v prvej samozrejme naopak).

Označme silu, ktorou ťahá lano závažie m_2 ako T_0, to znamená, že $T(0) = T_0$. V prvej polke lana platí

$$\frac{m}{L}(a+g) = \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

čiže napätie sa v nej bude meniť ako lineárna funkcia

$$T(x) = T_0 + \frac{m}{L}(a+g)x\,,$$

takže v bode kde sa lano otáča bude platiť $T(L/2) = T_0 + (m/2)(a+g)$.

V druhej polke lana bude platiť

$$\frac{m}{L}(a-g) = \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}\,,$$

čiže pre napätie bude platiť

$$T(x) = T\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{m}{L}(a-g)\left(x-\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{m}{2}(a+g) + \frac{m}{L}(a-g)\left(x-\frac{L}{2}\right)\,,$$

takže v bode kontaktu s kvádrom s hmotnosťou m_1 bude platiť

$$T(L) = T_0 + \frac{m}{2}(a+g) + \frac{m}{2}(a-g) = T_0 + ma\,.$$

To je sila, ktorou bude lano ťahať kváder m_1 nahor.

Môžeme napísať pohybové rovnice pre kvádre. Naďalej budeme značiť a ako zrýchlenie, ktorým m_1 zrýchľuje nadol a teda m_2 nahor. Takto bude pohybová rovnica pre m_2

$$m_2 a = T_0 - m_2 g\,,$$

môžeme si z tejto rovnice vyjadriť neznámu T_0 ako $T_0 = m_2(a+g)$. Napíšeme pohybovú rovnicu pre m_1 a dosadíme

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - (T_0 + ma)\,,\\ m_1 a &= m_1 g - m_2(a+g) - ma\,,\\ (m_1+m_2+m)a &= (m_1-m_2)g\,.\\ a &= g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+m}\,. \end{aligned}$$

Hotovo.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CA ... turbomolekulární pumpa

Turbomolekulární pumpy pro získávání nízkých tlaků fungují na principu změny hybnosti částic plynu směrem z čerpaného objemu. Aby byl efekt účinný, musí se jejich lopatky otáčet rychlostí srovnatelnou s tepelnou rychlostí molekul plynu. Uvažujme průměr lopatek $d = 15\,\mathrm{cm}$ a čerpaný plyn dusík o teplotě $25\,\mathrm{^\circ C}$. S jakou frekvencí se musí rotor v pumpě otáčet, aby se konce lopatek pohybovaly střední kvadratickou rychlostí částic dusíku za dané teploty? Molární hmotnost dusíku je $M_{\mathrm{N_2}} = 28\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. *Jarda se učil na zkoušku z vakuové fyziky.*

Střední kvadratická rychlost molekul plynu je dána jako

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\mathrm{N_2}}}} = 515\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kde m je hmotnost jedné molekuly dusíku, k Boltzmannova konstanta, R molární plynová konstanta, T termodynamická teplota a $M_{\mathrm{N_2}}$ molární hmotnost dusíku ze zadání.

Vyjádříme vztah mezi obvodovou rychlostí lopatek a frekvencí otáčení

$$v = \omega r = 2\pi f \frac{d}{2} = \pi d f\,,$$

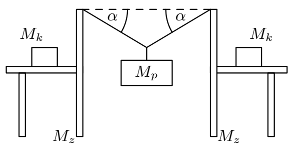
kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence otáčení a $r = d/2$ je poloměr lopatek. Odsud najdeme požadovanou frekvenci

$$f = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\mathrm{N_2}}}}\frac{1}{\pi d} \doteq 1\,090\,\mathrm{Hz}\,.$$

Výsledek se shoduje s frekvencemi, které se běžně používají v laboratořích. Díky turbomolekulárním pumpám se můžeme snadno dostat až do tlaků $1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}$. Je ale potřeba je předčerpat jiným typem vývěvy. Kvůli vysokým rychlostem otáčení je dále potřeba pumpy velmi dobře vyvážit, na druhou stranu v nich nejsou potřeba olejová maziva, která by mohla kontaminovat vnitřek vakuové aparatury.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha CB ... šoupající se sušák



Terka si na koleji vyrobila improvizovaný sušák na prádlo tak, že mezi dvě židle natočené opěradly k sobě natáhla vlnu, která se po pověšení prádla prověsila o úhel $\alpha = 13^\circ$. Židle se ale začaly šoupat směrem k sobě, takže je Terka zatížila konzervami s fazolemi v chilli omáčce. Jaké nejmenší množství takových konzerv bude potřebovat, aby židle zůstaly stát na místě? Hmotnost židle je $M_\mathrm{z} = 4{,}8\,\mathrm{kg}$, hmotnost konzervy $M_\mathrm{k} = 480\,\mathrm{g}$ a koeficient statického tření mezi židlí a podlahou je $f = 0{,}65$. Prádlo můžeme aproximovat hmotným bodem o hmotnosti $M_\mathrm{p} = 2\,\mathrm{kg}$ zavěšeným uprostřed šňůry na prádlo. *Terka pozorovala, jak Terka věší prádlo.*

Úlohu budeme řešit přes rozklad tíhové síly působící na prádlo, kterou označíme F_G. Protože prádlo je v klidu, musí na něj zhora působit ještě tahová síla závěsu, která musí být v rovnováze s tíhovou silou. Z rozkladu sil a znalosti úhlu vychýlení můžeme tuto tahovou sílu F_t vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{\frac{F_\mathrm{G}}{2}}{F_\mathrm{t}}\\ F_\mathrm{t} &= \frac{F_\mathrm{G}}{2\sin\alpha}\,.\end{aligned}$$

Musíme si dát pozor na to, že na prádlo působí tahová síla dvakrát, pokaždé od jedné židle, takže tíhovou silu ve výpočtu musíme vydělit dvěma.

Tatáž tahová síla, jen opačného směru, bude působit na židli. Nás bude zajímat její vodorovná (F_v) i svislá (F_s) složka. Ty můžeme vyjádřit opět z rozkladu sil

$$\begin{aligned}F_\mathrm{v} &= F_\mathrm{t}\cos\alpha = \frac{F_\mathrm{G}}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{F_\mathrm{G}}{2}\operatorname{cotg}\alpha\,,\\ F_\mathrm{s} &= F_\mathrm{t}\sin\alpha = \frac{F_\mathrm{G}}{2}\,.\end{aligned}$$

Zároveň budou obě židle s konzervami působit na zem celkovou tíhovou silou

$$F_\mathrm{c} = g\left(2M_\mathrm{z} + xM_\mathrm{k}\right)\,,$$

kde x je počet konzerv. V dalších výpočtech budeme pracovat s poloviční hodnotou, protože celou situaci řešíme pro jednu polovinu soustavy, tedy jednu židli a polovinu konzerv.

Aby se židle nešoupala, musí platit, že třecí síla se bude rovnat vodorovné síle na židli působící, získáváme tedy podmínku

$$\begin{aligned}f\left(\frac{F_\mathrm{c}}{2} + F_\mathrm{s}\right) &= F_\mathrm{v}\,,\\ \frac{fg\left(2M_\mathrm{z} + xM_\mathrm{k}\right)}{2} + \frac{fgM_\mathrm{p}}{2} &= \frac{gM_\mathrm{p}}{2}\operatorname{cotg}\alpha\,,\end{aligned}$$

přičemž jsme využili toho, že $F_\mathrm{G} = gM_\mathrm{p}$. Rovnici můžeme dále vynásobit dvojkou, pokrátit g a využít ji k vyjádření hledaného počtu konzerv

$$\begin{aligned}f\left(2M_\mathrm{z} + xM_\mathrm{k}\right) + fM_\mathrm{p} &= M_\mathrm{p}\operatorname{cotg}\alpha\,,\\ xM_\mathrm{k} &= \frac{M_\mathrm{p}\operatorname{cotg}\alpha}{f} - M_\mathrm{p} - 2M_\mathrm{z}\,,\\ x &= \frac{M_\mathrm{p}\operatorname{cotg}\alpha - M_\mathrm{p}f - 2M_\mathrm{z}f}{fM_\mathrm{k}}\,.\end{aligned}$$

Po dosazení tedy získáme výsledek $x = 3{,}6$ a správná odpověď tedy je, že Terka potřebuje minimálně čtyři konzervy.

Tereza Voltrová
tereza.voltrova@fykos.cz

Úloha CC ... magická vana

Jindra má vanu, ve které hladina vody klesá s konstantní rychlostí v_0 nezávisle její výšce h nad výtokovým otvorem. Výtokový otvor má průřez S_0. Můžete předpokládat, že platí aproximace $gh \gg v_0^2$. Určete průřez vany v závislosti na výšce $S = S(h)$. *Jindra si hrál s lodičkami.*

Pohyb kapaliny se řídí Bernoulliho rovnicí

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \mathrm{konst},$$

kde ρ je hustota kapaliny, v je rychlost kapaliny v daném bodě, p je tlak v daném bodě způsobený vnějším prostředím, $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení a h je výška daného bodu vztažená k referenčnímu bodu.

Je jasné, že i voda v Jindrově vaně musí splňovat Bernoulliho rovnici. Všechny výšky h budeme vztahovat k výtokovému otvoru. Na hladině vody ve vaně je rychlost vody v_0 konstantní (podle informací ze zadání), výška hladiny nad výtokovým otvorem je h a tlak je rovný atmosférickému tlaku $p = p_\mathrm{a}$. V místě výtokového otvoru voda vytéká neznámou rychlostí v, výška nad výtokovým otvorem je nulová a tlak je rovný atmosférickému tlaku $p = p_\mathrm{a}$. Tudíž dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_\mathrm{a} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_\mathrm{a}\,,$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh = \frac{1}{2}v^2\,.$$

Nyní nasadíme do boje další rovnici, a sice rovnici o konstantním objemovém průtoku. Jestliže v jednom místě protéká voda otvorem o průřezu S_1 rychlostí v_1 a na jiném místě protéká otvorem o průřezu S_2 rychlostí v_2, pak objemový průtok q splňuje

$$q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \mathrm{konst}\,.$$

Z Bernoulliho rovnice a z rovnice pro objemový průtok dostaneme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými S a v

$$S v_0 = S_0 v\,,$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh = \frac{1}{2}v^2\,,$$

odkud chceme vyjádřit závislost průřezu vany S na výšce nad výtokovým otvorem h. Vyjádříme rychlost v z druhé rovnice

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

a dosadíme do první rovnice

$$S v_0 = S_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

Závislost průřezu $S(h)$ vany na výšce h nad výtokovým otvorem je

$$S(h) = \frac{S_0}{v_0}\sqrt{v_0^2 + 2gh} = S_0\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} \approx S_0\sqrt{\frac{2gh}{v_0^2}}\,.$$

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha CD ... souboj titánů

Na dálnici je tak hustý provoz, že vozidla dodržují časový odstup $\tau = 3\,\mathrm{s}$. Přesto se jeden kamion rozhodne předjet jiný, před nímž je velká mezera. Přesune se do levého pruhu a zrychlí na $v_\mathrm{L} = 95\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, zatímco předjížděný jede stále $v_\mathrm{P} = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Auta v levém pruhu jedou $v_\mathrm{a} = 125\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, ale když se přiblíží k vozidlu před sebou na vzdálenost τv_L, okamžitě zpomalí na rychlost v_L. Kolik aut takto bude muset zpomalit? Délka obou kamionů je $L = 15\,\mathrm{m}$ a předjíždějící kamion se zařadí do původního pruhu tak, aby měl stejný odstup jako před předjížděním. Také můžete předpokládat, že po zařazení do levého pruhu bylo nejbližší auto τv_A za kamionem.

Jarda slyšel o dlouhé zácpě na dálnici.

Když se kamion přesune do levého pruhu, jeho rozestup za druhým kamionem činí τv_P. Potřebuje se dostat stejnou vzdálenost před něj, přičemž samozřejmě také musí urazit délku předjížděného kamionu a svoji délku. V levém pruhu tak stráví čas

$$T = \frac{2\tau v_\mathrm{p} + 2L}{v_\mathrm{L} - v_\mathrm{P}} \doteq 130\,\mathrm{s}\,.$$

Rozestup mezi auty v levém pruhu je τv_a, ten se teď může zkrátit na τv_L. Každé auto tedy může pokračovat rychlostí v_a až do doby, kdy se dostane do vzdálenosti τv_L od kamionu v levém pruhu a prudce zpomalí na v_L. Doba tohoto manévru trvá každému autu $t = \tau\left(v_\mathrm{a} - v_\mathrm{L}\right) / \left(v_\mathrm{a} - v_\mathrm{L}\right) = \tau$. Počet aut, která tak musí zpomalit, je

$$N = \frac{T}{\tau} = \frac{2\tau v_\mathrm{P} + 2L}{\left(v_\mathrm{L} - v_\mathrm{P}\right)\tau} \doteq 43\,.$$

V takové situaci se za předjíždějícím kamionem vytvoří kolona asi 43 vozidel, která musela zpomalit na rychlost v_L.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha CE ... nabitý čtverec

Kuličky s nábojem q jsou umístěny ve vrcholech čtverce, v jehož středu je kulička s nábojem $Q = -kq$. Jaká musí být hodnota konstanty k, aby byla celá soustava v rovnováze?

Danka si hrála s kuličkami.

Ze symetrie úlohy stačí, aby byly v rovnováze síly působící na kuličky ve vrcholech čtverce – síly působící na tu ve středu se vždy vyruší. Navíc stačí, když se podíváme pouze na kuličku v jednom vrcholu – u ostatních bude situace stejná. Odpudivé síly od kuliček ve vrcholech bude kompenzovat přitažlivá síla od té ve středu čtverce. Bude tedy platit

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{a^2}\right)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{2a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{kq^2}{a^2/2}\,,$$

odkud snadno dopočítáme

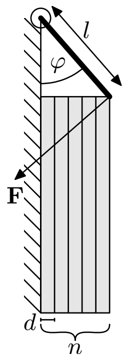
$$k = \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}\right) \doteq 0{,}957\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha CF ... složka s klipem

Uvažujme desky na papír, které jsou na horní straně vybaveny klipem, jenž drží papíry uvnitř. Nechť má klip délku 2 cm *a otáčí se na pružině s úhlovou tuhostí* $1{,}0\,\mathrm{Nm{\cdot}rad^{-1}}$*. Papíry mezi desku a klip přidáváme tak, že všechny dohromady tvoří kvádr a jsou uchycené na svém samotném okraji. Konec klipu působí na papír kolmo na svoji délku. Mezi papíry a klipem a mezi papíry a deskou uvažujte koeficient tření* f*, mezi papíry samotnými nekonečné tření. Zjistili jsme, že jakmile takto přidáme do klipu* 130 *papírů a otočíme desky svisle, tak všechny papíry vypadnou dolů. Jaká je hodnota koeficientu* f*? Uvažujme tloušťku jednoho papíru* 0,1 mm *a jeho hmotnost* 5,5 g.

Jarda nosí do školy právě takovou šikovnou složku.



Označme délku klipu l, úhlovou tuhost c, tloušťku jednoho papíru d, jeho hmotnost m a počet papírů n. Moment síly, kterým působí pružina na klip, určíme jako

$$M = c\varphi\,,$$

kde φ je úhel otočení klipu vůči deskám. Velikost úhlu najdeme z počtu papírů jako

$$\sin\varphi = \frac{nd}{l}\,.$$

Síla působící na papír tak odpovídá $F = M/l$ a směřuje kolmo na rovinu klipu. Tuto sílu si rozložíme na kolmou a rovnoběžnou k rovině papíru a desek. Jakmile desky s papíry postavíme kolmo k zemi, rovnoběžná složka působí dolů, zatímco kolmá působí do papíru. Dolů působí také tíhová síla papírů $F_\mathrm{g} = nmg$, kde g je tíhové zrychlení.

Proti silám dolů působí třecí síly mezi klipem a papíry a mezi papíry a deskami. Protože se papíry nepohybují ani směrem k deskám, ani do klipu, jsou normálové síly, které na ně působí, v rovnováze. Normálová síla od klipu

$$N = F\cos\varphi$$

je kompenzována reakcí desky o stejné velikosti. Každopádně třecí sílu držící papír v klipu vypočteme jako

$$F_\mathrm{t} = 2fN = 2fF\cos\varphi\,,$$

kde f je koeficient tření ze zadání a koeficient 2 pochází právě od obou normálových sil. Tato síla musí být v rovnováze se silami

$$F_\mathrm{g} + F\sin\varphi = nmg + F\sin\varphi = 2fF\cos\varphi\,.$$

Dosazením za F dostáváme rovnici

$$nmgl + c\varphi\sin\varphi = 2fc\varphi\cos\varphi\,,$$

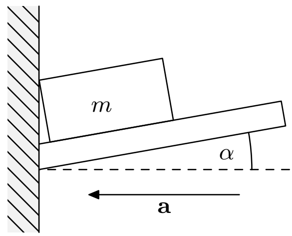
odkud koeficient tření po dosazení za úhel vyjádříme jako

$$f = \frac{nmgl + c\varphi\sin\varphi}{2c\varphi\cos\varphi} = \frac{nmgl + c\arcsin\left(\frac{nd}{l}\right)\frac{nd}{l}}{2c\arcsin\left(\frac{nd}{l}\right)\sqrt{1-\left(\frac{nd}{l}\right)^2}} = 0{,}56\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha CG ... padající kufr

Ve vlaku je nad sedačkami na poličce nakloněné o úhel $\alpha = 10^\circ$ umístěn dřevěný kufr o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$. S jakým nejmenším zrychlením se musí pohybovat vlak, aby kufr sjel z poličky a spadl na cestující? Koeficient statického tření mezi kufrem a poličkou je $f = 0{,}4$. *Cesty vlakem jsou nevyzpytatelné.*



Klíčem k vyřešení této úlohy je správně si zapsat síly působící na kufr a rozložit je na složky k kolmé $(F_\perp)$ k poličce a s ní vodorovné $\left(F_\parallel\right)$. Na kufr budou působit tři síly: tíhová $(F_\mathrm{G} = mg)$, třecí $(F_\mathrm{T} = ma)$ a setrvačná (F_S) kvůli zrychlení vlaku. Složky tíhové a setrvačné si můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{G}\perp} &= mg\cos\alpha\,,\\ F_{\mathrm{G}\parallel} &= mg\sin\alpha\,,\\ F_{\mathrm{S}\perp} &= ma\sin\alpha\,,\\ F_{\mathrm{S}\parallel} &= ma\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Třecí síla bude určena součtem sil kolmých na poličku vynásobených koeficientem statického tření, tedy

$$F_\mathrm{T} = f\left(F_{\mathrm{G}\perp} + F_{\mathrm{S}\perp}\right) = fmg\cos\alpha + fma\sin\alpha\,.$$

Aby se dal kufr do pohybu, musí se výslednice sil vodorovných s poličkou rovnat nule (respektive být nepatrně větší a orientovaná stejně, jako $F_{\mathrm{S}\parallel}$). Když tedy vezmeme v potaz i směry sil, protože jsou to vektorové veličiny, získáme rovnici

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{S}\parallel} &= F_\mathrm{T} + F_{\mathrm{G}\parallel}\\ ma\cos\alpha &= fmg\cos\alpha + fma\sin\alpha + mg\sin\alpha\\ a &= \frac{fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha}{m\cos\alpha - fm\sin\alpha} \end{aligned}$$

a po dosazení výsledek

$$a \doteq 6{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Můžeme si všimnout, že to jsou asi dvě třetiny tíhového zrychlení, a tím pádem je naprosto nerealistické, aby se vlak za běžných podmínek pohyboval s takovým zrychlením. Výjimkou by mohla být například dopravní nehoda nebo podobná krizová situace.

Tereza Voltrová
`tereza.voltrova@fykos.cz`

Úloha CH ... dioptrická

Hanka do školy nosí dioptrické brýle o optické mohutnosti $-0{,}5\,\mathrm{D}$. Jednou si je ale zapomněla doma, a proto si musela sednout jinam než na obvyklé místo. V jaké maximální vzdálenosti od tabule musí sedět, aby neviděla věci na tabuli rozmazaně? *Hanka hrála famfrpál s brýlemi.*

Jelikož má Hanka brýle se zápornými dioptriemi, tedy rozptylky, znamená to, že nevidí na dálku – je krátkozraká. Běžně má člověk bez této vady takzvaný *daleký bod* (tedy nejvzdálenější bod, který může vidět ostře) v nekonečnu. Krátkozraký člověk ho má blíže a na vzdálenější body nedokáže zaostřit. Musí proto nosit brýle s rozptylkami, aby mu brýle vytvořily virtuální obraz o něco blíže.

Pokud je zdroj v nekonečnu, jdou z něj paprsky rovnoběžně s optickou osou. Rozptylkou se podle definice zobrazí do jejího ohniska, obraz si tak z nekonečna přitáhneme blíže. Virtuální obraz všech bodů bližších než nekonečno se zobrazí mezi rozptylku a její obrazové ohnisko. Pokud tedy Hanka nosí takové brýle, díky kterým dokáže vidět ostře i body v nekonečnu, pak zcela jistě uvidí ostře i body, které jsou k ní blíž.

Vzdálenost Hančina dalekého bodu bude stejná, jako ohnisková vzdálenost brýlí, aby dokázala vidět ostře i body v nekonečnu. Kdyby byla vzdálenost jejího dalekého bodu jiná, potřebovala by nosit jiné brýle. Nyní už nám stačí připomenout vztah mezi dioptrií a ohniskovou vzdáleností

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{-0{,}5\,\mathrm{D}} = -2\,\mathrm{m}\,,$$

kde znaménko mínus znamená, že daleký bod je na opačné straně čočky než oko, což jsme předpokládali. Daleký bod ve vzdálenosti $2\,\mathrm{m}$ je tedy nejvzdálenějším bodem, který Hanka vidí ostře, musí si tedy sednout blíže než $2\,\mathrm{m}$ od tabule.

Kateřina Rosická
`kacka@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DA ... spalovací

Při spalování benzínu vstupují do reakce dvě molekuly $\mathrm{C_8H_{18}}$ spolu s $25\,\mathrm{O_2}$ a dochází ke vzniku oxidu uhličitého a vody. Uvažujte spotřebu auta $6\,\mathrm{l}\cdot(100\,\mathrm{km})^{-1}$ a hustotu benzínu $755\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jaký objem $\mathrm{CO_2}$ se za normálních podmínek vytvoří během cesty auta z Brna do Prahy po trase dlouhé $207\,\mathrm{km}$? *Jarda si jednou pořídí auto na vodík.*

Jeden litr benzínu obsahuje látkové množství uhlíku

$$n_\mathrm{C} = 8\frac{V\rho}{M_{\mathrm{C_8H_{18}}}} \doteq 53\,\mathrm{mol}\,,$$

kde $V = 1\,\mathrm{l}$, ρ je hustota benzínu a $M_{\mathrm{C_8H_{18}}} \doteq 114\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ jeho molární hmotnost. Protože na jeden mol uhlíku vznikne jeden mol oxidu uhličitého, známe rovnou i molární množství $\mathrm{CO_2}$.

Dosazením do stavové rovnice ideálního plynu dostáváme hledaný objem $V_{\mathrm{CO_2}}$ jako

$$V_{\mathrm{CO_2}} = \frac{n_\mathrm{C} R T_\mathrm{a}}{p_\mathrm{a}} = 8\frac{V\rho}{M_{\mathrm{C_8H_{18}}}}\frac{RT_\mathrm{a}}{p_\mathrm{a}} \doteq 1{,}3\,\mathrm{m^3}\,,$$

přičemž R je plynová konstanta, T_a normální teplota a p_a atmosférický tlak. Auto má spotřebu $6\,\mathrm{l}\cdot(100\,\mathrm{km})^{-1}$, tedy za trasu dlouhou $207\,\mathrm{km}$ spálí $6\,\mathrm{l}\cdot(100\,\mathrm{km})^{-1}\cdot 207\,\mathrm{km} = 12{,}4\,\mathrm{l}$ benzínu. Do ovzduší tedy vypustí $12{,}4\,\mathrm{l}\cdot 1{,}3\,\mathrm{m^3{\cdot}l^{-1}} = 16\,\mathrm{m^3}$. Používaný benzín není čistou látkou s uvedeným vzorcem, proto se musí ve výfukovém systému používat různé filtry a katalyzátory, aby do ovzduší unikalo co nejméně nebezpečných látek.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DB ... jezírko na zrcadle

Jindra vlastní Newtonův dalekohled s dutým kulovým primárním zrcadlem. Primární zrcadlo má poloměr křivosti $r = 2{,}40\,\mathrm{m}$. Jednou Jindra nechal teleskop nezakrytý ve vertikální poloze venku, do dalekohledu napršelo a celé primární zrcadlo se naplnilo vodou s indexem lomu $n = 1{,}33$. Kolikrát se zmenšila ohnisková vzdálenost primárního zrcadla? Zanedbejte tloušťku vodní vrstvy oproti ohniskové vzdálenosti.

Jindra pak našel v tubusu dalekohledu plavat potápníky.

Definice ohniska je bod na optické ose, kde se protnou odražené či zlomené paprsky přicházející rovnoběžně s optickou osou. Ohnisková vzdálenost je pak vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla (bod na povrchu zrcadla ležící na optické ose). V paraxiální aproximaci předpokládáme, že úhly všech přicházejících i odražených světelných paprsků s optickou osou jsou malé $\alpha \ll 1$. Paprsky rovnoběžné s optickou osou dopadající na povrch zrcadla v kolmé vzdálenosti h od optické osy se odrazí pod úhlem $2\alpha \approx 2h/r$. Paraxiální aproximace pro kulové zrcadlo s poloměrem křivosti r dává ohniskovou vzdálenost

$$f_0 = \frac{h}{2\alpha} = \frac{r\alpha}{2\alpha} = \frac{r}{2}.$$

Tento vztah platí pro kulové zrcadlo bez vody uvnitř.

Vodní vrstvou na zrcadle projdou paprsky rovnoběžné s optickou osou beze změny. Poté se odrazí od povrchu zrcadla podle zákona odrazu. Označme úhel *bod odrazu – střed křivosti – vrchol zrcadla* jako α. Paprsek se tedy odrazí pod úhlem 2α vzhledem k optické ose. Poté ale ještě musí projít rozhraním voda – vzduch. Podle Snellova zákona lomu se zlomí pod úhlem β směrem k optické ose

$$\sin(\beta) = n\sin(2\alpha)\,,$$
$$\beta \approx 2n\alpha\,.$$

Při odvození jsme použili aproximaci pro malé úhly $\sin x \approx x$ pro $|x| \ll 1$. Nová ohnisková vzdálenost je

$$f = \frac{h}{\beta} = \frac{r\alpha}{\beta} = \frac{r}{2n} = \frac{f_0}{n} = \frac{f_0}{1{,}33}.$$

Ohnisková vzdálenost se tedy zmenšila 1,33krát.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha DC ... vombátčí

Maličký vombátek Cooper nedokáže vyrobit tolik tepla, aby pokryl tepelné ztráty do okolí nory, které činí 30 wattů. Jelikož je ale Cooper chytrý, zakryje kruhový vchod o poloměru $r = 0{,}2\,\mathrm{m}$ vrstvou velkých listů, která má tloušťku $0{,}98\,\mathrm{cm}$ a součinitel tepelné vodivosti $0{,}039\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. To pomůže, protože teplo neuniká z nory jinudy než vchodem. Tak si Cooper v noře dokáže udržet stálou teplotu $20\,^\circ\mathrm{C}$ i přesto, že venku je $0\,^\circ\mathrm{C}$. Jedné noci však přišel velký vítr a všechny listy odfoukl mimo výběh. Cooperovi tedy opět byla zima.

Kolikrát hmotnějšího kamaráda má Cooper pozvat do své nory, aby v ní bylo opět příjemných $20\,^\circ\mathrm{C}$, pokud předpokládáme, že tepelný výkon vombatů je přímo úměrný jejich hmotnosti?

Káťa byla nadšená, že v ZOO Praha konečně budou mít vombata.

Keď je vchod do nory zakrytý listami, tepelné straty prechádzajúce vrstvou listov práve vyrovnávajú tepelný výkon vombata Coopera. Ak považujeme tepelný tok vrstvou listou za homogénny a ustálený, platí vzťah

$$\frac{P_\mathrm{C}}{S} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}\,,$$

kde P_C je tepelný výkon Coopera, $S = \pi r^2$ je plocha vchodu, λ súčiniteľ tepelnej vodivosti, d hrúbka vrstvy listov, a T_1, T_2 postupne teplota v nore a vonku. Vyjadríme výkon Coopera a vyčíslime

$$P_\mathrm{C} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)\pi r^2}{d} \doteq 10\,\mathrm{W}\,.$$

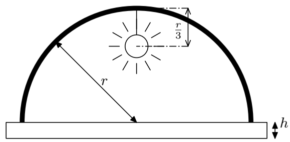
Celkové tepelné straty nory pri otvorenom vchode sú $P = 30\,\mathrm{W}$. Kamarát Coopera preto musí pokryť tepelný výkon

$$P_\mathrm{k} = P - P_\mathrm{C} = 20\,\mathrm{W}\,.$$

Keďže uvažujeme, že tepelný výkon vombata je priamo úmerný jeho hmotnosti, Cooper potrebuje v nore kamaráta s dvojnásobným tepelným výkonom ako má on sám. Cooperov kamarát teda musí mať oproti nemu dvojnásobnú hmotnosť.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha DD ... pouliční lampa



Pouliční lampu si můžeme představit jako polokouli o poloměru $r = 30\,\mathrm{cm}$, v níž je ve vzdálenosti $r/3$ shora zavěšena žárovka. Polokoule se nachází nad zemí ve výšce $H = 4\,\mathrm{m}$ od jejího středu a je zespodu přikrytá skleněným poklopem o tloušťce $h = 1\,\mathrm{cm}$. O kolik cm *je menší poloměr plochy, kterou osvětluje lampa s poklopem, oproti poloměru plochy, kterou by osvětlovala, kdyby poklop přítomen nebyl? Index lomu skla je 1,5 a rozptyl záření ve skle můžete zanedbat. Taktéž předpokládejte, že poklop dostatečně ční přes okraje lampy.*

David si důkladně prohlížel pouliční lampu na cestě z porady.

Pro velikost osvětlené plochy nás budou zajímat paprsky dopadající na samotný okraj skleněného poklopu. Počítejme postupně horizontální vzdálenost, kterou takový paprsek urazí. V lampě nejprve urazí vzdálenost $R_{1,\,1} = r$, než dopadne na skleněný poklop. Z jednoduché geometrie určíme sinus úhlu dopadu paprsku jako

$$\sin\alpha_1 = \frac{3\sqrt{13}}{13}\,.$$

Po lomu pak ze Snellova zákona dostáváme

$$\sin\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1 = \frac{2\sqrt{13}}{13}\,.$$

Paprsek ve skle urazí vertikální vzdálenost h, snadno tedy určíme horizontální vzdálenost jako

$$R_{1,\,2} = h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_2\,.$$

Snadno si uvědomíme, že po lomu paprsek poletí opět pod úhlem α_1 od kolmice. Tentokrát urazí vertikální vzdálenost $H - h$, proto analogicky dostáváme

$$R_{1,\,3} = (H - h) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \,.$$

Poloměr osvětlené části je tedy v situaci s poklopem

$$R_1 = R_{1,\,1} + R_{1,\,2} + R_{1,\,3} = \frac{3\,775}{6}\,\mathrm{cm}\,.$$

Situace bez poklopu je snadná – poloměr osvětlené plochy můžeme určit z pouhé podobnosti trojúhelníků jako

$$\frac{R_2}{r} = \frac{H + 2/3r}{2/3r} \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{3H + 2r}{2} = 630\,\mathrm{cm}\,.$$

Proto dostáváme, že poloměr plochy, kterou osvětluje lampa bez poklopu je větší, a to o

$$R_2 - R_1 = \frac{5}{6}\,\mathrm{cm} \doteq 0{,}833\,\mathrm{cm}\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha DE ... troubící vlaky

Danka jede na kole podél rovné vlakové trati rychlostí v_D. Ve stejném směru jako ona za ní po trati jede vlak rychlostí $v_1 = 156\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, který troubí frekvencí $f_1 = 330\,\mathrm{Hz}$. Z opačného směru jede druhý vlak rychlostí $v_2 = 65\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, jehož frekvence troubení je $f_2 = 350\,\mathrm{Hz}$. Danka však slyší oba vlaky vydávat stejný tón. Jakou rychlostí tedy jede? Výsledek uveďte v jednotkách $\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. *Danka se byla projet na kole.*

Danka počuje tón s odlišnou frekvenciou od tej, akú vydáva vlak, pretože vlak sa voči nej pohybuje. Nastáva tak Dopplerov efekt. Pri tomto efekte je dôležitý pohyb voči médiu prenášajúcemu vlnenie, teda v tomto prípade voči vzduchu, ktorý prenáša zvuk. Voči vzduchu, ktorý považujeme v našom prípade za nehybný, sa pohybujú vlaky ako zdroje zvuku a aj Danka ako prijímač. V prípade oboch vlakov je frekvencia, ktorú počuje Danka, vyššia ako tá, ktorú vlak vydáva, pretože sa vlak ako zdroj zvuku k Danke približuje. V tomto prípade platí pre frekvenciu f, ktorú Danka počuje od prvého vlaku, vzorec

$$f = f_1 \frac{c - v_\mathrm{D}}{c - v_1}\,,$$

kde $c = 343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rýchlosť zvuku vo vzduchu. V čitateli zlomku sa Dankina rýchlosť odčítava od rýchlosti zvuku, pretože sa Danka pohybuje v smere od vlaku. V menovateli zlomku sa rýchlosť vlaku odčítava od rýchlosti zvuku, pretože sa vlak pohybuje smerom k Danke. Rovnakú frekvenciu f Danka počuje aj od druhého vlaku. V tomto prípade platí vzťah

$$f = f_2 \frac{c + v_\mathrm{D}}{c - v_2}\,,$$

kde súčet v čitateli zlomku vyjadruje pohyb Danky smerom k druhému vlaku a rozdiel v menovateli zase pohyb vlaku smerom k Danke. Teraz stačí dať tieto dve rovnice do rovnosti a vyjadriť rýchlosť Dankinho pohybu

$$
\begin{aligned}
f_1 \frac{c - v_D}{c - v_1} &= f_2 \frac{c + v_D}{c - v_2} \,, \\
(c - v_D)(c - v_2) f_1 &= (c + v_D)(c - v_1) f_2 \,, \\
c(c - v_2) f_1 - v_D (c - v_2) f_1 &= c(c - v_1) f_2 + v_D (c - v_1) f_2 \,, \\
c(c - v_2) f_1 - c(c - v_1) f_2 &= v_D (c - v_2) f_1 + v_D (c - v_1) f_2 \,, \\
v_D &= c \frac{(c - v_2) f_1 - (c - v_1) f_2}{(c - v_2) f_1 + (c - v_1) f_2} \,.
\end{aligned}
$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$
v_D \doteq 3{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 13{,}7\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \,.
$$

Danka ide na bicykli rýchlosťou $13{,}7\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha DF ... nespavá civilizace

Představte si, že se na Venuši vyvinula mimozemská civilizace, která se vznáší na hustých oblacích kyseliny sírové ve výšce $h = 75\,\mathrm{km}$ nad povrchem. Pro svůj život potřebuje neustálý přísun slunečního svitu. Obyvatelé proto musejí vést kočovný život a pořád se plavit směrem za Sluncem. Jakou minimální průměrnou rychlostí se musejí plavit, pokud žijí na 60. stupni zeměpisné šířky? Poloměr Venuše je 0,95 poloměru Země, rotace okolo osy Venuši trvá 243 dní, oběh okolo Slunce 224 dní a její rotační osa je přibližně kolmá na rovinu oběhu. Uvažujte kruhovou dráhu Venuše okolo Slunce a nezapomeňte, že Venuše rotuje opačným směrem, než obíhá okolo Slunce. *Matěj se bojí tmy.*

Najprv spočítame ako dlho trvá deň pri pohľade z Venuše, teda, ako dlho trvá od poludnia po nasledujúce poludnie. Tento deň sa nazýva synodický a označme ho T'. Keďže Venuša rotuje v opačnom smere ako obieha okolo Slnka, tak synodický deň je kratší ako čas rotácie okolo osi T. Konkrétne, po jednom obehu Venuše okolo Slnka – po prejdení doby P – sa Venuša otočí okolo osi $N = P/T$ krát. Za túto dobu však ubehne $N + 1 = P/T'$ synodických dní, pretože jeden deň je „skrytý“ v samotnom obehu Venuše okolo Slnka. Spojením týchto dvoch rovníc dostávame

$$
\frac{P}{T} = \frac{P}{T'} - 1 \,.
$$

Z toho vyjadríme dĺžku synodického dňa

$$
T' = \frac{PT}{P + T} \doteq 117\,\mathrm{d} \,.
$$

Mimozemská civilizácia musí preplávať okolo planéty za dobu T'. Aby sme získali ich rýchlosť v, potrebujeme vypočítať vzdialenosť s ktorú takto preplávajú. Obvod rovnobežky je škálovaný s kosínusom zemepisnej šírky φ. Navyše nesmieme zabudnúť, že mimozemšťania sa nachádzajú vo výške $h = 75\,\mathrm{km}$ nad povrchom. To je vo vzdialenosti $0{,}95R_\mathrm{Z}+h$ od stredu Venuše, kde $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ je polomer Zeme. Teda

$$v = \frac{s}{T'} = 2\pi(0{,}95R_\mathrm{Z} + h)\cos(\varphi)\,\frac{P+T}{PT} \doteq 1{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 6{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,$$

čo je rýchlejšia chôdza.

Radovan Lascsák
`radovan.lascsak@fykos.cz`

Úloha DG ... rychlé miony

Kolikrát dál, ve střední hodnotě, doletí mion letící rychlostí $v_2 = 0{,}99c$ ve srovnání s mionem letícím rychlostí $v_1 = 0{,}95c$? Střední doba života mionu je $\tau = 2{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

Danka si vzpomněla na přednášku z STR.

Označme si t_1 čas letu miónu pri rýchlosti v_1 a t_2 čas letu pri rýchlosti v_2. Potom pre dráhu, ktorú prejde mión v jednotlivých prípadoch platí $x_1 = v_1t_1$ resp. $x_2 = v_2t_2$. Čas letu miónu je daný okrem iného jeho strednou dobou života. Ide o to, že mión ako nestabilná častica existuje iba nejaký čas a potom sa rozpadne. Keďže sa mión pohybuje relativistickou rýchlosťou, nameria pozorovateľ na zemi kvôli dilatácii času dlhšiu dobu existencie miónu ako je čas, ktorý vníma sám mión. Pre dilatáciu času platí vzťah

$$t = \tau\gamma\,.$$

Tu γ je gama faktor a platí preň

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

kde v je rýchlosť pohybu miónu voči pozorovateľovi na zemi a c je rýchlosť svetla. Potom pomer dráh oboch miónov môžeme vyjadriť ako

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{v_2t_2}{v_1t_1}\,,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{v_2\tau}{v_1\tau}\frac{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}}{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}}\,,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{v_2}{v_1}\sqrt{\frac{1-\frac{v_1^2}{c^2}}{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\,.$$

Po dosadení zadaných hodnôt dostávame

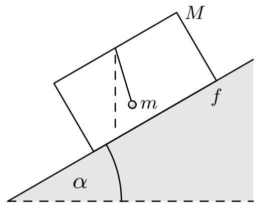
$$\frac{x_2}{x_1} \doteq 2,3\,.$$

Rýchlosťou $0{,}99c$ doletí mión 2,3krát ďalej ako rýchlosťou $0{,}95c$.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha DH ... vozík s olovnicí a třením

Mějme kopec se sklonem $\alpha = 30^\circ$. Na něj položíme dutý kvádr o hmotnosti $M = 10\,\mathrm{kg}$, kterému z horní stěny visí provázek délky $l = 15\,\mathrm{cm}$ s hmotným bodem o hmotnosti $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ na konci (tuto hmotnost nepočítáme do hmotnosti kvádru). Poté pustíme kvádr dolů z kopce. Na jakém úhlu vzhledem ke svislému směru se provázek ustálí? Uveďte kladný výsledek, bude-li lanko vychýlené ve směru jízdy, a záporný, bude-li vychýlené v opačném směru. Koeficient tření mezi kvádrem a kopcem je $f = 0{,}10$.



Lego rád iteruje svoje úlohy.

Zaujíma nás ustálená situácia. V nej sa už povrázok a hmotný bod voči kvádru nehýbu, a teda to pôsobí, akoby spolu s kvádrom tvorili jedno dokonale tuhé teleso. Môžeme teda spočítať s akým zrýchlením bude toto teleso zrýchľovať dole kopcom.

Jeho celková hmotnosť je $M + m$; zložka tiažovej sily v smere rovnobežnom s kopcom bude $(M+m)g\sin\alpha$. Zložka v smere kolmom na kopec (čiže normálová sila) je $(M+m)g\cos\alpha$ a trecia sila (pôsobiaca proti pohybu a v smere rovnobežnom s kopcom) má tak veľkosť $f(M+m)g\cos\alpha$. Spolu je kváder urýchľovaný silou

$$F = F_\mathrm{p} - F_\mathrm{t} = (M+m)g\sin\alpha - f(M+m)g\cos\alpha,$$

a jeho zrýchlenie teda bude

$$a = \frac{F}{M+m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,.$$

Respektíve, takto to platí, pokiaľ je trenie dosť malé na to, aby sa kváder naozaj šmýkal dole kopcom. V opačnom prípade, by bolo zrýchlenie proste 0. Môžeme si ale overiť dosadením hodnôt zo zadania, že kváder sa naozaj bude šmýkať, nakoľko dostávame $a = 4\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Presuňme sa teraz do sústavy zrýchľujúcej spolu s kvádrom. Na to, aby sa hmotný bod zavesený na lanku v tejto sústave nehýbal, musí naň pôsobiť nulová výsledná sila. Rozoberme si sily, ktoré naň pôsobia. Jeho tiažová sila mg pôsobí zvislo nadol; zotrvačná sila ma rovnobežne s kopcom smerom dozadu; a nakoniec sila, ktorou pôsobí lanko, na ktorom visí. Veľkosť a smer sily od lanka budú (v ustálenej situácii) presne také, aby táto sila kompenzovala výslednicu dvoch zvyšných síl. Dôležité je, že smer sily od lanka je rovnaký, ako smer samotného lanka. Musíme teda zistiť smer výslednice zvyšných dvoch síl.

Tiažová sila mg pôsobí v smere nadol. Zvislá zložka zotrvačnej sily má veľkosť $ma\sin\alpha = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha$ a smeruje nahor; vodorovná zložka má veľkosť $ma\cos\alpha$ a smeruje dozadu. Vyslednica tiažovej a zotrvačnej sily má teda v zvislom smere zložku o veľkosti

$$F_\mathrm{vert} = mg\left(1 - \sin^2\alpha + f\cos\alpha\sin\alpha\right) = mg(\cos\alpha + f\sin\alpha)\cos\alpha$$

smerom nadol a vo vodorovnom

$$F_\mathrm{horiz} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha$$

smerom dozadu. Všimnime si, že pre limitný prípad zvislého kopca ($\alpha = \pi/2$) nepôsobia na hmotný bod v sústave spojenej s kvádrom žiadne sily, to je spôsobené tým, že táto sústava padá so zrýchlením g, a teda hmotný bod je z pohľadu tejto sústavy v beztiažovom stave.

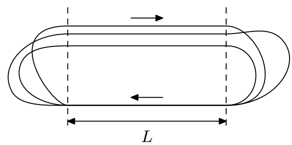
Vráťme sa však k uhlu vychýlenia lanka. Zaujíma nás jeho vychýlenie voči zvislému smeru, takže tento uhol získame ako arkus tangens pomeru vodorovnej zložky sily ku zvislej zložke

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{F_\mathrm{horiz}}{F_\mathrm{vert}} = \operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}\,.$$

Povrázok bude vychýlený o uhol β smerom dozadu, preto výsledok musíme zadať ako -24°.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EA ... závody hmotných bodů



Lego se připravuje na soutěž teoretických fyziků, kteří proti sobě soutěží v závodech hmotných bodů. Hmotné body krouží po trati následujícím způsobem. Nejprve jedou přímočaře po rovince délky L, potom se libovolným způsobem otočí o 180° a zase jedou po rovince délky L, po které následuje další otočka o 180° a tak dále. Lego vyrobil svůj hmotný bod tak, že dokáže vyvinout nejvyšší zrychlení a a jeho rychlost vzhledem k trati má vždy stejnou velikost. Poraďte Legovi, jak má zvolit velikost této rychlosti, aby jeho hmotný bod obkroužil trať za co nejkratší čas. *Lego je příliš gramlavý na to, aby závodil něčím skutečným.*

Trať sa skladá z dvoch identických roviniek a dvoch identických zákrut, stačí nám teda sledovať súčet času pre jednu rovinku a jednu zákrutu. Pre veľkosť rýchlosti v prejde Legov hmotný bod rovinku za čas $t_1 = L/v$.

Zároveň pre veľkosť rýchlosti v sa bude musieť otáčať po kružnici s polomerom, pre ktorú platí

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a}\,.$$

Polkruhová zákruta bude mať pre Legov hmotný bod dĺžku $o/2 = \pi R$, čiže ju prejde za čas

$$t_2 = \frac{o/2}{v} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi v}{a}\,.$$

Chceme minimalizovať čas

$$T = t_1 + t_2 = \frac{L}{v} + \frac{\pi v}{a}\,,$$

kde parameter, cez ktorý minimalizujeme je v. Čiže zderivujeme T podľa v a položíme výsledok rovný 0:

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}v} = -\frac{L}{v^2} + \frac{\pi}{a}\,,$$

$$\sqrt{\frac{La}{\pi}} = v\,,$$

a dostali sme optimálnu rýchlosť.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EB ... těstovinový problém

Adam si na kolejích všiml zajímavého jevu. Maximální možný průtok vody z kohoutku závisí na její teplotě. Víme, že možné rozmezí teplot je $\langle t_1, t_2 \rangle$, voda s teplotou $t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ vytéká s průtokem $Q_1 = 55\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$, voda s teplotou $t_2 = 35\,^\circ\mathrm{C}$ průtokem $Q_2 = 400\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$ a závislost průtoku na teplotě je lineární. Adam potřeboval odlít horkou vodu z hrnce s těstovinami – do dřezu pod kohoutkem proto začal přilévat horkou vodu o teplotě $T = 80\,^\circ\mathrm{C}$ s průtokem $Q = 35\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$. Spočtěte teplotu vody, kterou musí z kohoutku pustit, aby teplota vody vytékající ze dřezu byla nejmenší možná. Voda se ve dřezu nehromadí, její teplota se okamžitě ustaluje a tepelné ztráty do okolí neuvažujte. Hustotu vody považujte za konstantní.

Adam nechce trápit potrubí.

Napišme si nejprve kalorimetrickou rovnici pro jednodušší situaci – tedy máme ve dřezu nějaké konstantní množství vody o dvou počátečních teplotách.

$$m \cdot c \cdot (t_\mathrm{v} - t) = M \cdot c \cdot (T - t_\mathrm{v})\,,$$

kde c značí měrnou tepelnou kapacitu vody, m značí hmotnost vody kterou pouštíme z kohoutku, t její teplotu, M hmotnost vody kterou Adam přilévá do dřezu a t_v výslednou teplotu, kterou se snažíme minimalizovat. Tento zápis nicméně v naší situací není příliš korektní, protože místo hmotností máme zadaný průtok – všimněme si ale, že pokud v rovnici zkrátíme na obou stranách měrnou tepelnou kapacitu, obě strany rovnice pak podělíme hustotou vody a následně časem, dostaneme zápis, který už v naší situaci uplatnit můžeme. Konkrétně

$$q \cdot (t_\mathrm{v} - t) = Q \cdot (T - t_\mathrm{v}) \quad \Rightarrow \quad t_\mathrm{v} = \frac{QT + qt}{Q + q}\,. \tag{3}$$

Nyní určeme, jak závisí průtok vytékající vody na její teplotě. Ze zadání víme, že závislost je lineární. Hledáme tedy závislost ve tvaru

$$q = a \cdot t + b\,.$$

Dosazením hodnot v zadání a vyřešením soustavy rovnic dostaneme snadno

$$q = (23\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}{\cdot}K^{-1}}) \cdot t - (405\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}})\,.$$

Tento vztah dosadíme spolu s dalšími hodnotami do rovnice (3), pro jednoduchost vše uvážíme bezrozměrně.

$$[t_\mathrm{v}] = \frac{23[t]^2 - 405[t] + 2800}{23[t] - 370}\,.$$

Tento výraz nyní derivujme podle bezrozměrné teploty $[t]$ a tuto derivaci položíme rovnu nule. Po úpravě dostaneme

$$\frac{529[t]^2 - 17020[t] + 85450}{(23[t] - 370)^2} = 0\,.$$

Stačí, aby byl nule roven čitatel zlomku. Vyřešením této kvadratické rovnice pak dostaneme jediné řešení vyhovující zadání, a to, že se hledané minimum nachází v bodě $[t] \doteq 25{,}95$. Odpovědí na otázku ze zadání tedy je zhruba $26\,^\circ\mathrm{C}$.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha EC ... další korálek na drátě

Mějme korálek o hmotnosti m navlečený na dokonale pevný drát ve tvaru kružnice o poloměru r upevněný v prostoru. Vezmeme pružinu tuhosti k s nulovou klidovou délkou a jeden její konec upevníme ve vzdálenosti $r/2$ od středu kruhu a druhý konec připevníme ke korálku. Jaká bude perioda malých kmitů korálku kolem jeho stabilní polohy?

Lego si všiml, že tento rok navrhl málo úloh na kmitání.

Stabilná poloha korálky bude pochopiteľne v mieste, kde je najbližšie k uchyteniu pružiny, keďže bude vtedy dĺžka pružiny $l_0 = r/2$. Otázka znie, čo sa zmení, keď sa korálka pohne o Δo po kružnici. Môžeme si pomôcť zavedením súradnej sústavy, ktorá má stred v strede kružnice, po ktorej sa môže korálka pohybovať. Natočme jej osi tak, že v stabilnej polohe má korálka súradnice $[r, 0]$ (a teda bod uchytenia pružiny má súradnice $[r/2, 0]$).

Riešenie cez energiu

Keď sa korálka pohne po obvode o Δo, znamená to, že prešla uhol $\varphi = \Delta o/r$, kde $\varphi \ll 1$, potom môžeme jednoducho zapísať nové súradnice korálky $[r\cos\varphi, r\sin\varphi]$. Dĺžku pružiny v tejto polohe dostaneme vypočítaním vzdialenosti tohto bodu od bodu, v ktorom je pružina uchytená, čo zvládneme pomocou Pytagorovej vety. Rozdiel x-ových súradníc je $r(\cos\varphi - 1/2)$ a rozdiel y-ových súradníc je $r\sin\varphi$. Potom dĺžka pružiny je

$$l = \sqrt{r^2\left(\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi} = r\sqrt{\cos^2\varphi - \cos\varphi + \frac{1}{4} + \sin^2\varphi} = r\sqrt{1 - \cos\varphi + \frac{1}{4}}\,,$$

pričom pre malé uhly φ približne platí, že $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Ďalej si treba uvedomiť, že nás nezaujíma ani tak samotná dĺžka pružiny, ako jej zmena energie oproti rovnovážnej polohe. Nakoľko energia pružinky je $kl^2/2$, tak nárast energie oproti rovnovážnej polohe bude $k(l^2 - l_0^2)/2$, vyjadríme teda

$$l^2 - l_0^2 \approx r^2\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{2}\varphi^2\,.$$

Dosadíme späť $\varphi = \Delta o/r$ a to dosadíme do zmeny energie pružiny

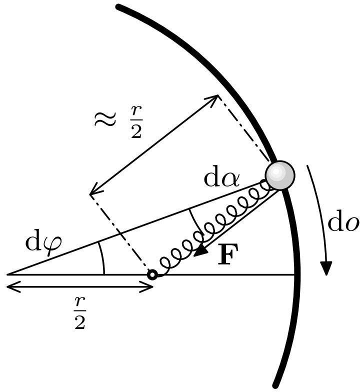
$$\Delta E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k(l^2 - l_0^2) = \frac{1}{2}\frac{k}{2}\Delta o^2\,.$$

Nás zaujíma to, akú tuhosť cíti korálka pri svojom kmitaní. To zistíme jednoducho tým, že položíme zmenu energie rovnú $k_\mathrm{eff}\Delta o^2/2$, kde k_eff je tuhosť takej pružinky, ktorá by kmitala rovnako po pripevnení korálku (bez obmedzení na pohyb). Porovnaním dostávame $k_\mathrm{eff} = k/2$.

Riešenie cez silu

Druhá možnosť je spočítať aká bude sila pôsobiaca na korálku po vychýlení o Δo. Na korálku pôsobí len pružina a drôt, pričom pôsobenie od drôtu akurát vykompenzuje zložku sily od pružiny, ktorá je kolmá k drôtu (lebo v tom smere sa korálka hýbať nebude). Čiže výsledná sila pôsobiaca na korálku bude zložka sily od pružiny rovnobežná so smerom drôtu v danom bode.

Pre malé kmity môžeme zanedbať zmenu dĺžky pružiny a brať teda, že veľkosť sily, ktorou bude pružina ťahať je $F_0 = kr/2$. Zostáva nájsť priemet tejto sily do smeru rovnobežného s drôtom. Tento priemet je rovný $\Delta F = F_0 \sin\alpha$, kde α je uhol zovretý medzi smerom, ktorým



Obr. 2: Náčrt situace.

pružina ťahá a smerom kolmým k drôtu. Pružina ťahá smerom k bodu kde je uchytená. Nakoľko drôt je vytvarovaný do tvaru kruhu, smer kolmý k drôtu v nejakom bode je zhodný so spojnicou toho bodu so stredom kruhu.

Keď si situáciu nakreslíme, vidíme, že trojuholník (s vrcholmi v strede kruhu, bode uchytenia pružiny a v korálke) je pre dostatočne malé vychýlenie približne rovnoramenný trojuholník. Čiže uhly oproti jeho ramenám sú zhodné, a tým pádom $\alpha \approx \varphi \ll 1$. Zostáva využiť, že $\sin\varphi \approx \varphi$, dosadiť $\varphi = \Delta o/r$ a dostávame, že sila pôsobiaca na korálku po vychýlení o Δo z rovnovážnej polohy je

$$\Delta F = F_0 \sin\Delta\alpha \approx k\frac{r}{2}\varphi = \frac{k}{2}\Delta o\,.$$

Pre tuhosť, ktorú korálka „cíti“ platí $\Delta F = k_{\mathrm{eff}}\Delta o$, čiže porovnaním dostávame, že korálka je ťahaná späť do rovnováhy s efektívnou tuhosťou $k_{\mathrm{eff}} = k/2$.

Pôsobí to skoro až zázračne, ale tieto dva úplne odlišné postupy skutočne dajú rovnaký výsledok.

Výsledok

Tak ako tak sme došli k tomu, že korálka kmitá akoby bola pripevnená k pružinke s tuhosťou $k_{\mathrm{eff}} = k/2$. Zostáva si uvedomiť, že z hľadiska kinetickej energie alebo zotrvačnosti môžeme pre malé kmity zahnutie trajektórie korálky zanedbať. To znamená, že môžeme dosadiť do známeho vzorca pre periódu malých kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\mathrm{eff}}}} = 2\pi\sqrt{2\frac{m}{k}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha ED ... zvýšíme intenzitu

V mnoha technických aplikacích potřebujeme získat vysoké intenzity elektrického pole. Jako jednu elektrodu použijeme drátek o průměru 3,0 mm, *který vložíme na osu druhé, duté válcové elektrody. Její poloměr je* 1,2 cm. *Na elektrody přivedeme napětí* U. *Toto zapojení porovnáme s deskovým kondenzátorem, kam přiložíme stejné napětí a vzdálenost desek bude* 2,0 cm. *Určete poměr elektrické intenzity v těsném okolí drátku v prvním zapojení, vůči intenzitě v deskovém kondenzátoru ve druhém zapojení.* *Jarda chtěl pozorovat Eliášův oheň.*

Označme poloměr velké válcové elektrody $b = 1{,}2\,\mathrm{cm}$, poloměr té malé $a = 1{,}5\,\mathrm{mm}$ a vzdálenost desek kondenzátoru $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. Intenzita elektrického pole v deskovém kondenzátoru je jednoduše

$$E_\mathrm{d} = \frac{U}{d}\,.$$

U válcového kondenzátoru je situace složitější. Protože užší z elektrod je válcová, vytváří kolem sebe pole, které klesá úměrně r^{-1}, kde r je vzdálenost od osy symetrie. Mezi elektrodami je rozdíl potenciálů U, což můžeme zapsat podmínkou

$$U = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{c}{r}\,\mathrm{d}r = c \ln\left(\frac{b}{a}\right)\,.$$

Odsud vyjádříme konstantu úměrnost c a najdeme elektrické pole v okolí elektrody, tedy

$$E_a = \frac{c}{a} = \frac{U}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)}\,.$$

Hledaný poměr je tak

$$\frac{E_a}{E_\mathrm{d}} = \frac{d}{a \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = 6{,}4\,.$$

Pouhou změnou geometrie tak můžeme dosáhnout v některých místech vyšší intenzity pole i při podobných vnějších rozměrech.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha EE ... pták Fykosák

Pták Fykosák běžně létá krajinou rychlostí $v_0 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *v horizontálním směru. V této rychlosti je síla dynamického vztlaku stejná jako síla tíhová. Když si ale Fykosák chce odpočinout na nějakém stromě, musí na něj přistát – na to musí letět maximálně rychlostí* $v_1 = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ *v horizontálním směru. Předpokládejme, že v tomto směru zpomaluje na tuto rychlost s konstantním zpomalením* $a = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Jakou by měl při přistání vertikální rychlost, pokud měl před začátkem zpomalování vertikální rychlost nulovou a nijak nezrychloval směrem nahoru?*
Pozn.: Dynamický vztlak je úměrný druhé mocnině horizontální rychlosti.

David měl strach, aby nevyletěl z Matfyzu.

Nejprve spočítáme, jak dlouho bude ptákovi Fykosákovi trvat, než se dostane na přistávací rychlost v_1. Protože je zpomalení konstantní, platí

$$v_1 = v_0 - aT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{v_0 - v_1}{a}\,,$$

kde v_0 je počáteční rychlost, a je zpomalení v horizontálním směru a T je náš hledaný čas. Díky podmínce pro F_dyn získáme rovnost, díky které jsme schopni dopočítat konstantu úměrnosti

$$F_\mathrm{dyn} = k \cdot v_0^2 = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{v_0^2}\,.$$

Z Newtonova zákona síly dále pro vertikální zrychlení a_V platí

$$a_\mathrm{V} = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{V} = \frac{mg - F_\mathrm{dyn}}{m}\,.$$

A protože nás zajímá vertikální rychlost, stačí toto zrychlení pouze integrovat podle času. Označíme-li v_H horizontální rychlost Fykosáka, můžeme psát

$$\begin{aligned} v_\text{přistávací} &= \int_0^T a_\mathrm{V}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{mg - F_\mathrm{dyn}}{m}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^T \frac{mg - \frac{mg}{v_0^2}\cdot v_\mathrm{H}^2}{m}\,\mathrm{d}t = \\ &= g\int_0^T 1 - \frac{1}{v_0^2}\cdot v_\mathrm{H}^2\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme $v_\mathrm{H} = v_0 - at$ a výsledný integrál už snadno spočteme jako

$$\begin{aligned} v_\text{přistávací} &= g\int_0^T 1 - \frac{(v_0 - at)^2}{v_0^2}\,\mathrm{d}t = g\int_0^T \frac{2at}{v_0} - \frac{a^2t^2}{v_0^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= g\frac{2a}{v_0}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^T - g\frac{a^2}{v_0^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T = g\frac{-aT^2}{v_0} - g\frac{a^2T^3}{3v_0^2} = \\ &= g\frac{a}{v_0}\frac{(v_0 - v_1)^2}{a^2} - g\frac{a^2}{3v_0^2}\frac{(v_0 - v_1)^3}{a^3} = g\frac{3v_0\,(v_0 - v_1)^2 - (v_0 - v_1)^3}{3v_0^2 a} = \\ &= g\frac{(v_0 - v_1)^2(2v_0 + v_1)}{3v_0^2 a}\,. \end{aligned}$$

Po dosazení pak dostáváme $v_\text{přistávací} \doteq 46\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vidíme tedy, že ptáci musí během přistávání též výrazně zpomalovat ve vertikálním směru.

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha EF ... nedokonalá dioda

Uvažujme diodu, která má v propustném směru odpor $2{,}2\,\Omega$, *zatímco v závěrném je její odpor nekonečný. Nedokonalost diody spočívá v její nenulové parazitní kapacitě* $19\,\mathrm{pF}$, *která se dá v náhradním schématu zakreslit jako paralelní kondenzátor k odporu diody. Takovou diodu připojíme ke zdroji střídavého napětí o frekvenci* $3{,}5\,\mathrm{GHz}$ *a amplitudě napětí* $12\,\mathrm{V}$. *Určete poměr maximálního proudu v propustném směru ku maximálnímu proudu, který poteče v obvodu v závěrném směru. Uveďte kladnou hodnotu.* *Jarda jel v jednosměrce opačným směrem.*

V paralelním zapojení kondenzátoru a rezistoru máme na obou prvcích stejné napětí, které je v našem případě rovno napětí na zdroji $U = U_0 \sin(\omega t)$, kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence zdroje. Platí tak

$$U = RI_R \,,$$
$$U = \frac{Q}{C} \,,$$

kde R je odpor rezistoru a I_R proud, který skrze něj prochází. Náboj na kondenzátoru o kapacitě C je Q. Proud procházející větví s kapacitou odpovídá jednoduše

$$I_C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = U_0 \omega C \cos(\omega t) \ .$$

Celkový proud diodou určíme jako součet proudů skrze obě větve

$$I = U_0 \left(\frac{1}{R} \sin(\omega t) + C\omega \cos(\omega t) \right) \ .$$

Kapacitní část proudu zůstává pro oba směry stejně velká, jen s opačným znaménkem, zatímco odporová se mění v závislosti na směru. Nechť je v první polovině periody $T = 1/f$ dioda zapojena v propustném směru, pak pro proud platí

$$I_{0<t<T/2} = U_0 \left(\frac{1}{R_1} \sin(\omega t) + C\omega \cos(\omega t) \right) \,,$$

přičemž $R_1 = 2{,}2\,\Omega$. Později však po dosazení $R_2 = \infty$ místo R_1 dostaneme

$$I_{T>t>T/2} = U_0 C\omega \cos(\omega t) \ .$$

Maximální proud v propustném směru najdeme pomocí derivace výrazu $I_{0<t<T/2}$ podle času a položením rovno nule

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_{0<t<T/2}}{\mathrm{d}t} &= U_0 \left(\frac{1}{R_1} \omega \cos(\omega t) - C\omega^2 \sin(\omega t) \right) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{R_1 C\omega} = \mathrm{tg}(\omega t_m) \\ &\Rightarrow I_{0<t<T/2,max} = \frac{U_0}{R_1} \sqrt{R_1^2 C^2 \omega^2 + 1} \,. \end{aligned}$$

Hodnota maximálního proudu v závěrném směru je evidentně $I_{T>t>T/2,max} = U_0 C\omega$. Hledaný poměr vychází

$$\frac{I_{0<t<T/2,max}}{I_{T>t>T/2,max}} = \frac{\sqrt{R_1^2 C^2 \omega^2 + 1}}{R_1 C\omega} = \frac{\sqrt{4\pi^2 R_1^2 C^2 f^2 + 1}}{2\pi R_1 C f} = 1{,}48 \,.$$

I zde vidíme, že pro $C \to 0$ jde poměr do nekonečna tak, jak bychom očekávali. Pro vysoké frekvence nebo velké kapacity naopak tento poměr jde k jedné, tedy usměrnění diody se úplně přestane projevovat. S tímto je tedy potřeba počítat při konstrukci vysokofrekvenčních obvodů.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha EG ... přitlačený poklop

Uvažujme prostor s otvorem o ploše A, který uzavřeme rovným svislým válcovým poklopem o téže vnitřní i vnější ploše A. Z prostoru vyčerpáme vzduch na tlak $10\,\mathrm{Pa}$ a poté vývěvu odstavíme. Mezi poklopem a zbytkem vakuové aparatury jsou ovšem netěsnosti, takže se dovnitř z okolní atmosféry stále dostávají částice vzduchu. Uvažujme, že rychlost pronikání je přímo úměrná rozdílu tlaků mezi prostory a nepřímo úměrná síle, kterou je poklop k aparatuře přitlačován. Po 7 hodinách od vyčerpání byl uvnitř naměřen tlak $80\,\mathrm{Pa}$. Určete, za jak dlouho od vyčerpání aparatury tlak přesáhne $200\,\mathrm{Pa}$, pokud je v aparatuře celou dobu teplota $T = 20\,\mathrm{^\circ C}$.

Jardovi stoupá tlak.

Přepišme zadání do rovnice pro počet částic uvnitř poklopu N

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{(p_\mathrm{a} - p_\mathrm{in})}{F}\,, \tag{4}$$

kde $\mathrm{d}N/\,\mathrm{d}t$ je časové změna počtu částic uvnitř vakuového prostoru, α je nějaký, zatím neznámý koeficient úměrnosti, p_a je atmosférický tlak mimo aparaturu, p_in je tlak uvnitř, který se s časem mění, a F je síla, kterou je poklop přitlačován ke zbytku aparatury.

Nyní vyjádřeme několik vztahů. Počet částic uvnitř je zřejmě

$$N = N_\mathrm{A} n\,,$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a n je počet molů plynu uvnitř. Ze stavové rovnice ideálního plynu najdeme závislost mezi n, V a tlakem p_in jako

$$p_\mathrm{in} V = nRT\,,$$

kde T je termodynamická teplota. Vidíme, že počet částic uvnitř je přímo úměrný tlaku p_in, neboť všechny ostatní jmenované veličiny jsou v průběhu procesu konstantní

$$N = \frac{p_\mathrm{in} V}{RT} N_\mathrm{A}\,,$$

Síla, která působí na poklop, je z vnější strany $F_\mathrm{out} = A p_\mathrm{a}$. Podle zadání je plocha na vnitřní straně stejně velká, proto je síla působící zevnitř $F_\mathrm{in} = A p_\mathrm{in}$. Celková síla, kterou je poklop přitlačován, je proto $F = A\,(p_\mathrm{a} - p_\mathrm{in})$. Vidíme, že je tedy také úměrná rozdílu tlaků mezi vnitřkem a vnějškem. Protože je poklop umístěný svisle, nepřitlačuje jej jeho tíhová síla k aparatuře.

Dosaďme do naší diferenciální rovnice (4) za N a F. Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}p_\mathrm{in}}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha RTA}{VN_\mathrm{A}}\frac{(p_\mathrm{a} - p_\mathrm{in})}{(p_\mathrm{a} - p_\mathrm{in})} = \beta\,,$$

kde jsme označili konstantu $\alpha RTA/(VN_\mathrm{A}) = \beta$ a zkrátili závislost na rozdílu tlaků. Tlak se v aparatuře zvyšuje lineárně jako

$$p_\mathrm{in} = p_\mathrm{in0} + \beta t\,,$$

kde t je čas od vyčerpání na tlak $p_\mathrm{in0} = 10\,\mathrm{Pa}$. Zároveň víme, že po čase $t_0 = 7\,\mathrm{h}$ je tlak $p_\mathrm{in1} = 80\,\mathrm{Pa}$. Odsud můžeme dopočítat konstantu β jako

$$p_\mathrm{in1} = p_\mathrm{in0} + \beta t_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_\mathrm{in1} - p_\mathrm{in0}}{t_0} = \beta\,.$$

Tlak $p_{\text{in2}} = 200\,\text{Pa}$ pak nastane v čase τ, který najdeme jako

$$p_{\text{in2}} = p_{\text{in0}} + \beta\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{p_{\text{in2}} - p_{\text{in0}}}{\beta} = t_0 \frac{p_{\text{in2}} - p_{\text{in0}}}{p_{\text{in1}} - p_{\text{in0}}} = 19\,\text{h}\,.$$

Tlak 200 Pa bude v aparatuře 19 h od vyčerpání na 10 Pa.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha EH ... asynchronní jednofázový motor

Máme-li k dispozici zdroj střídavého napětí jen s jednou fází, který chceme použít na sestrojení elektromotoru, můžeme například připojit paralelně 2 větve a v jedné z nich posunout fázi přidáním kondenzátoru. Potřebujeme, aby byl fázový rozdíl mezi větvemi $\pi/2$ a aby v každé z nich byla stejná amplituda proudu. Každá větev obsahuje po 2 cívkách zapojených sériově, z nichž má každá indukčnost L a odpor R. Jak musíme zvolit úhlovou frekvenci zdroje ω a kapacitu kondenzátoru C, který zapojíme do série s jednou větví, abychom dostali požadovaný výsledek? *Lego přednášel o elektromotorech na soustředění.*

Podmienkou na to, aby mali prúdy pripojené k jednému zdroju rovnakú amplitúdu je to, aby mali obe vetvy aj rovnakú amplitúdu. Ak ďalej požadujeme, aby boli prúdy oproti sebe posunuté o $\pi/2$ musí byť aj uhol medzi vektormi znázorňujúcimi impedancie v komplexnej rovine rovný $\pi/2$.

Impedancia vetvy bez kondenzátora bude

$$Z_1 = 2R + i2\omega L\,,$$

kde ako i značíme komplexnú jednotku. Impedancia vetvy s kondenzátorom bude

$$Z_1 = 2R + i\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\,.$$

Vidíme, že reálna zložka impedancie je rovnaká a z podmienky na rovnakú veľkosť impedancii vyplýva, že aj komplexná zložka musí byť rovnako veľká. Ak majú byť impedancie oproti sebe posunuté, musia byť navzájom komplexne združené $Z_1 = \bar{Z}_2$. Inými slovami komplexné zložky musia byť opačné

$$2\omega L = -\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\,,$$
$$4\omega L = \frac{1}{\omega C}\,.$$

Ak zároveň chceme aby bol fázový rozdiel $\pi/2$, v kombinácii s $Z_1 = \bar{Z}_2$ tak dostávame, že uhly ktoré zvierajú obe impedancie s reálnou osou musia byť $\pi/4$. Čo znamená, že reálna a komplexná zložka musia byť rovnako veľké

$$2\omega L = 2R \to \omega = \frac{R}{L}\,.$$

Našli sme tak potrebnú uhlovú frekvenciu. Zostáva dosadiť ju do predchádzajúcej rovnice

$$4\frac{R}{L}L = \frac{1}{\frac{R}{L}C}\,,$$
$$C = \frac{L}{4R^2}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FA ... neodolatelná přitažlivost reloaded

Jindra už si přítelkyni našel, a tak se rozhodl svou nepotřebnou černou díru z úlohy 8 ve Fyziklání online 2023 prodat někomu dalšímu. Všiml si ale, že se mu černá díra vlivem Hawkingova záření zmenšuje. Jindrova černá díra měla počáteční hmotnost $3{,}675\cdot 10^{12}$ kg. *Vztah pro teplotu Hawkingova záření je*

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}\,,$$

kde M je hmotnost černé díry a $\hbar, c, G, k$ jsou redukovaná Planckova konstanta, rychlost světla ve vakuu, gravitační konstanta a Boltzmannova konstanta. Pro Schwarzschildův poloměr černé díry dále platí $R_\mathrm{s} = 2GM/c^2$. Předpokládejte, že černá díra vyzařuje pouze fotony z horizontu událostí a nepřijímá žádnou hmotu z okolí. Za kolik let se Jindrova černá díra vypaří?

Jindra zdraví Denču do Frenštátu.

Jestliže uděláme předpoklad, že černá díra vyzařuje pouze fotony z horizontu událostí, pak září výkonem

$$P = 4\pi R_\mathrm{s}^2\sigma T^4 \tag{5}$$

podle Stefanova-Boltzmannova zákona, kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, T je teplota černé díry a

$$R_\mathrm{s} = \frac{2GM}{c^2} \tag{6}$$

je Schwarzschildův poloměr černé díry závisející na hmotnosti M černé díry. Jak víme ze zadání, i teplota černé díry závisí na její hmotnosti

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}\,. \tag{7}$$

Počáteční teplota Jindrovy černé díry byla $T_0 = 3{,}34\cdot 10^{10}\,\mathrm{K}$, což je asi o tři řády více než teplota v nitru Slunce. Stefanova-Boltzmannova konstanta se dá vyjádřit pomocí jiných fundamentálních konstant

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2\hbar^3}\,. \tag{8}$$

Dosadíme vztahy (6), (7) a (8) do rovnice (5) a upravíme

$$P = 4\pi\frac{4G^2M^2}{c^4}\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}\frac{\hbar^4c^{12}}{4096\pi^4G^4M^4k^4} = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2M^2}.$$

Odvodili jsme vztah pro zářivý výkon černé díry závisející jen na její hmotnosti M. Zářivému výkonu odvozenému podle předpokladů ze zadání (pouze fotony, vyzařování z horizontu událostí) se říká Bekensteinův-Hawkingův zářivý výkon.

Jelikož černá díra vyzařuje energii a podle předpokladu ze zadání do ní z okolí nepadá žádná hmota, bude ztrácet hmotnost. Einteinův vztah $E = mc^2$ dává do souvislosti energii z hmotností. Tudíž pro ztrátu hmoty černé díry dostaneme diferenciální rovnici

$$-c^2 \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2}.$$

Počáteční hmotnost černé díry je $M_0 = 3{,}675 \cdot 10^{12}$ kg a její koncová hmotnost po vypaření je nulová. Počáteční čas je $t = 0$ a čas vypaření černé díry je T. S použitím těchto integračních mezí můžeme vyřešit diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} -\int_{M_0}^{0} M^2 \,\mathrm{d}M &= \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} \int_0^T \mathrm{d}t \\ \frac{1}{3} M_0^3 &= \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2} T \\ T &= \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4} M_0^3 = 4{,}172 \cdot 10^{21}\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Jindrova černá díra se vypaří za $4{,}172 \cdot 10^{21}$ s, což odpovídá $1{,}32 \cdot 10^{14}$ rokům.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha FB ... Rydbergův stav

Jaké hlavní kvantové číslo by musel mít elektron v atomu vodíku, aby byl od jádra vzdálený jednu astronomickou jednotku? Uvažujte Bohrův model atomu.

Jarda se cítil odtržený od reality.

K řešení úlohy využijeme Bohrův model atomu vodíku. Zde je elektron přitahován k jádru elektrostaticky coulombickou silou

$$F_\mathrm{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua, e náboj elektronu i protonu (elementární náboj) a r vzdálenost elektronu od jádra atomu.

Tato síla se rovná dostředivé síle

$$F_\mathrm{d} = m_\mathrm{e} \frac{v^2}{r}\,,$$

která na elektron o hmotnosti m_e obíhající rychlostí v působí. Důležitým postulátem v Bohrově modelu je kvantování momentu hybnosti elektronu

$$L = m_\mathrm{e} v\, r = n\hbar\,,$$

kde n je hlavní kvantové číslo a $\hbar$ redukovaná Planckova konstanta. Tuto podmínku je možné ekvivalentně formulovat tak, že na kruhové trajektorii o délce $2\pi r$ najdeme celý počet vlnových délek elektronu, kde vlnovou délku definujeme jako $\lambda = h/p$, přičemž p je hybnost.

Dosazením z kvantovací podmínky za rychlost elektronu do rovnosti sil dostaneme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_\mathrm{e}\frac{1}{r}\left(\frac{n\hbar}{m_\mathrm{e}r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r = n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e}e^2} = n^2 \cdot 5{,}297 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\,.$$

Dosazením do podmínky v zadání

$$1\,\mathrm{AU} = r = n^2 \cdot 5{,}297 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{1\,\mathrm{AU}}{5{,}297 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}} \doteq 53 \cdot 10^9\,.$$

V případě vysoce excitovaných elektronů v atomech hovoříme o Rydbergových stavech. Byly pozorovány elektrony vzdálené od jader stovky nanometrů, což je na poměry mikrosvěta extrémně hodně. Pro tak vzdálené elektrony stačí jen nepatrná energie k ionizaci. Naše úloha uvažuje dokonce o mnoho řádů větší vzdálenosti, proto bychom takové chování v pozemských podmínkách připravit nemohli.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FC ... odpor reakce

Uvažujme obvod, ve kterém ke stejnosměrnému zdroji napětí $U = 450\,\mathrm{mV}$ připojíme pomocí elektrod elektrolyt. Aby náboj mohl obvodem protékat, je potřeba při jeho přechodu z elektrolytu do elektrody a naopak překonat jistý odpor. Uvažujme náhradní zapojení obvodu ve formě sériově zapojeného rezistoru R_p, který reprezentuje přechod mezi elektrolytem a elektrodami, a rezistoru s odporem $R_\mathrm{o} = 28\,\mathrm{m\Omega}$, který reprezentuje ohmické ztráty v celém obvodu. Odpor R_p ovšem závisí na napětí u, které na něm je, jako $R_\mathrm{p} = R_\mathrm{p0}\exp(-u/\alpha)$, kde $\alpha = 100\,\mathrm{mV}$ a $R_\mathrm{p0} = 7{,}0\,\Omega$. Určete proud, který bude obvodem protékat.

Jarda stále zpracovává data ze své bakalářky.

Proud protékající obvodem můžeme vyjádřit jako

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{p} + R_\mathrm{o}}\,,$$

přičemž je ale R_p závislé na na proudu.

Napětí na rezistoru R_p odpovídá

$$u = U - IR_\mathrm{o}\,.$$

Úpravou první rovnice a dosazením za R_p dostáváme

$$U - IR_\mathrm{o} = IR_\mathrm{p} = IR_\mathrm{p0}\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right) = IR_\mathrm{p0}\exp\left(-\frac{U - IR_\mathrm{o}}{\alpha}\right)\,.$$

Úpravami převedeme na tvar

$$u = (U - u)\,\frac{R_\mathrm{p0}}{R_\mathrm{o}}\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right)\,,$$

odkud

$$\frac{x}{(\xi - x)} = \beta\exp(-x)\,,$$

kde jsme zavedli bezrozměrnou proměnnou $x = u/\alpha$, poměr $\beta = R_{\mathrm{p0}}/R_{\mathrm{o}} = 250$ a poměr $\xi = U/\alpha = 4{,}5$. Toto všechno jsme udělali, abychom vyřešili rovnici, která nemá analytické řešení.

Provedeme logaritmování obou stran rovnice a dostaneme

$$x = \ln\left(\frac{\beta\,(\xi - x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{250\,(4{,}5 - x)}{x}\right) .$$

Řešení nejprve zkusíme odhadnout. Vyzkoušíme na pravou stranu dosadit $x = 2$, pak na levé straně vyjde $x = 5{,}745$. Tuto hodnotu znovu dosadíme do pravé strany, dostaneme ale záporný argument logaritmu, což není správně. Vidíme ale, že jsme pravděpodobně hodnotu x trefili aspoň řádově.

Zkusíme dosadit $x = 3$ na pravou stranu. Dostaneme $x = 4{,}828$, což vede na stejný problém jako předtím. Pro $x = 4$ dostaneme z pravé strany $3{,}442$, hodnota tedy bude ležet někde mezi. Postupným půlením intervalu a dosazováním hodnot $3{,}5; 3{,}75; 3{,}87; 3{,}81$ dojdeme k hodnotě $3{,}813$. Vyzkoušením $3{,}811$ dostaneme $x = 3{,}811\,06$, což už je velmi dobrá shoda. Během chvíle jsme tak nalezli numerické řešení rovnice a můžeme vyjádřit proud I jako

$$I = \frac{U - u}{R_{\mathrm{o}}} = \frac{U - x\alpha}{R_{\mathrm{o}}} = 2{,}46\,\mathrm{A} .$$

Obvodem protéká proud $2{,}46\,\mathrm{A}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FD ... třepetající se vlajka

Představme si vlajku jako dokonale tuhý homogenní obdélník s hmotností m, délkou vodorovné strany a a svislé strany b, přičemž okolo jedné své svislé strany se může volně otáčet.

Vítr fouká rychlostí v. Předpokládejte, že veškerá interakce mezi vlajkou a vzduchem je popsána silou o celkové velikosti $F = KSv^2$, kde S je průmět tělesa do roviny kolmé na směr větru a K je konstanta. Síla působí kolmo na vlajku rovnoměrně po celém jejím povrchu.

Spočítejte periodu malých kmitů.

Legolas chtěl aproximovat vlajku.

Keď bude vlajka vychýlená o malý uhol $\varphi \ll 1\,\mathrm{rad}$ oproti smeru vetra, jej priemet na rovinu kolmú na tento smer bude $S = ab\sin\varphi \approx ab\varphi$. Bude na ňu pôsobiť sila veľkosti $F = Kv^2ab\varphi$.

Akým momentom sily bude táto sila pôsobiť na vlajku? Zadanie hovorí, že sila pôsobí rovnomerne po celom povrchu vlajky, tým pádom „ťažisko“ tejto sily bude uprostred vlajky. Zároveň sa v zadaní píše, že táto sila je kolmá na vlajku, čiže jej rameno bude $a/2$. Dostávame, že moment sily pôsobiaci proti vychýleniu, keď je vlajka vychýlená o uhol φ je $M = Fa/2 = Kv^2a^2b\varphi/2$. Takže direkčný moment (akási „uhlová tuhosť“) bude $D = Kv^2a^2b/2$.

Zostáva zistiť moment zotrvačnosti vlajky. Smer, v ktorom sa neotáča nás nezaujíma, a tak je našou úlohou určiť moment zotrvačnosti tyče s hmotnosťou m a dĺžkou a, okolo osi prechádzajúcej jej krajným bodom; ten je $I = ma^2/3$.

Zostáva otázka, ako z týchto medzivýsledkov dostať periódu kmitov. Buďto môžeme poznať / nájsť v tabuľkách vzorec na periódu fyzikálneho kyvadla, ktorý je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} ,$$

kde I je moment zotrvačnosti kyvadla okolo osi otáčania a D je direkčný moment okolo tej istej osi. Pre typické fyzikálne kyvadlo $D = mga$, kde m je hmotnosť, g je tiažové zrýchlenie a napokon a je vzdialenosť osi otáčania a ťažiska. V našom prípade je samozrejme D niečo úplne iné, nakoľko sila ktorá vlajkou kmitá nie je tiažová, ale odporová sila od vetra. Význam direkčného momentu ako „uhlovej tuhosti" ale zostáva rovnaký. Vzorec $T = 2\pi\sqrt{I/D}$ sa dá tiež odhadnúť pomocou rozmerovej analýzy ako analógia ku vzorcu pre periódu lineárneho harmonického oscilátoru $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Pokiaľ vám motivácia z predchádzajúceho odseku stačí, môžete tento odsek preskočiť. Ak nie, tak odvodenie vyplýva jednoducho z druhej impulzovej vety

$$I\ddot{\varphi} = M\,,$$

kde M je moment sily pôsobiaci na teleso. Keď dosadíme, že vlajka je vracaná späť do rovnovážnej polohy momentom sily $M = -D\varphi$, kde D je náš direkčný moment a φ je vychýlenie vlajky oproti rovnovážnej polohe, dostávame diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$I\ddot{\varphi} = -D\varphi\,,$$

ktorej riešením je (môžete si overiť)

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{I}}t + \psi_0\right)\,,$$

kde ψ_0 a φ_0 sú konštanty určené z počiatočných podmienok. Dôležité je, že periódu tohto pohybu nájdeme ako (najmenší) čas, ktorý keď pripočítame ku t tak nezmeníme fázu (čiže zmeníme fázu o 2π), takže dostávame rovnicu

$$\sqrt{\frac{D}{I}}t + \psi_0 + 2\pi = \sqrt{\frac{D}{I}}(t+T) + \psi_0\,,$$

$$2\pi = \sqrt{\frac{D}{I}}T\,,$$

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = T\,.$$

Tak ako tak, došli sme ku vzorcu $T = 2\pi\sqrt{I/D}$; zostáva doňho dosadiť

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2/3}{Kv^2a^2b/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{3Kv^2b}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FE ... umývání prkénka

Představte si, že ve dřezu umýváte prkénko na krájení. Natočíte ho pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ vůči zemi (kratší hrana se dotýká dna dřezu) a necháte na něj dopadat vodu. Předpokládejte, že se voda po dopadu odrazí všemi směry v rovině prkénka rychlostí $v = 45\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Kolik procent horní strany tohoto kuchyňského nádobí smáčí voda, jestliže jsou jeho rozměry $h = 27\,\mathrm{cm}$ a $d = 17\,\mathrm{cm}$ a voda dopadá na jeho střed? *Jarda dokáže vymyslet úlohu při každé činnosti.*

Na vodu v každém bodě prkénka působí složka tíhového zrychlení o velikosti $g\sin\alpha$ směrem dolů po prkénku. Situace je tedy analogická ochranné parabole – vyšetřujeme všechny body, kde se může ocitnout voda po odrazu ze středu prkénka. Zavedeme souřadnice na prkénku tak, že střed umístíme doprostřed spodní hrany, osa x povede vodorovně a osa y kolmo na ni po ploše prkénka.

Pak oblast, do které se voda dostává, leží pod křivkou

$$y = \frac{h}{2} + \frac{v^2}{2g\sin\alpha} - \frac{x^2 g\sin\alpha}{2v^2}\,.$$

Musíme ještě vyšetřit, jestli ochranná parabola někdy protnula spodní hranu. Tyto body najdeme položením $y = 0$ v předchozí rovnici jako

$$x = \pm\sqrt{\frac{hv^2}{g\sin\alpha} + \frac{v^4}{g^2\sin^2\alpha}} = 9{,}3\,\mathrm{cm} > \frac{d}{2} = 8{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Zjistili jsme, že parabola nikde neprotne spodní hranu prkénka. Díky tomu pak plochu jednoduše spočítáme pomocí integrálu s mezemi od $-d/2$ do $d/2$

$$\int_{-d/2}^{d/2}\left(\frac{h}{2} + \frac{v^2}{2g\sin\alpha} - \frac{x^2 g\sin\alpha}{2v^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}d + \frac{v^2}{2g\sin\alpha}d - \frac{d^3 g\sin\alpha}{24v^2}\,.$$

Jelikož se ptáme na část, potřebujeme určit poměr této plochy vůči ploše celého prkénka, takže řešení úlohy vyjádříme jako

$$p = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2gh\sin\alpha} - \frac{d^2 g\sin\alpha}{24hv^2} = 0{,}40 = 40\,\%\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha FF ... Arda

Svět z knihy Silmarillion se jmenuje Arda. Místo koule má tento svět tvar disku o poloměru mnohem větším než jeho tloušťka. Tíhové zrychlení je na povrchu uprostřed disku ale stejné jako na Zemi. Najděte plošnou hustotu Ardy.

Jardova vzpomínka na povedené soustředění s krabicí experimentálního vybavení.

Použijeme analogii Gaussova zákona z elektrostatiky, ale s jinými konstantami. V elektrostatice je v okolí rozsáhlé desky s plošnou nábojovou hustotou σ intenzita $E = \sigma/(2\varepsilon)$. Intenzita E odpovídá gravitačnímu zrychlení g a ε je analogické s gravitační konstantou.

Ze srovnání Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona najdeme analogii $\varepsilon = 1/(4\pi G)$. Plošnou hustotu Ardy tedy určíme jako

$$\sigma = \frac{g}{2\pi G} = 2{,}3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Pokud bychom uvažovali hustotu materiálu světa jako $\rho = 5\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, musela by být jeho tloušťka $d = \sigma/\rho = 4\,700\,\mathrm{km}$. Aby však platilo přiblížení ze zadání, které říká, že poloměr disku je mnohem větší než jeho tloušťka, musel by být tento poloměr mnohonásobně větší než například poloměr naší Země.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FG ... nudná dovolená

Pták Fykosák letos vyrazil o Vánocích na dovolenou. Protože ho v exotické destinaci už nebavilo válet se celý den u moře, zašel se podívat po místních technických památkách. V jednom muzeu našel matematické kyvadlo, které se v čas jeho příchodu kývalo ve směru z jihu na sever. Když pak po osmi a půl hodinách z budovy odcházel, kývalo se ve směru západ–východ. Na jaké rovnoběžce Fykosák trávil dovolenou? *Jarda pokračuje v úlohách s Foucaultovým kyvadlem.*

Jistě jste někdy slyšeli o Foucaltově kyvadlu, kterým byla v osmnáctém století demonstrována rotace Země kolem své osy. K nalezení řešení úlohy musíme najít úhlovou rychlost, s jakou se otáčí rovina kyvu. Můžeme dopředu prozradit, že je to $\omega_1 = \Omega \sin\lambda$, kde $\Omega = 2\pi/(24\,\mathrm{h})$ je úhlová rychlost rotace Země a λ je rovnoběžka, na které se Fykosák nachází.

Zaveďme v muzeu kartézskou souřadnicovou soustavu. Osa z nechť míří kolmo k povrchu, osa x na východ a osa y na sever. Otáčení roviny kmitů kyvadla způsobuje Coriolisova síla, která se objevuje v rotujících vztažných soustavách. Naše zavedená soustava mezi takové určitě patří, proto se zde právě tato síla objevuje. Působí na předměty, které se pohybují radiálně na směr otáčení, a to tangenciálně. Kromě této síly na kyvadlo působí také tíhová síla a síla závěsu.

Vektor úhlové rychlosti rotace Země má v dané vztažné soustavě složky

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\lambda \\ \Omega\sin\lambda \end{pmatrix}.$$

Coriolisovu sílu zapíšeme jako

$$\mathbf{F}_\mathrm{C} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}\,,$$

kde m je hmotnost kyvadla a $\mathbf{v}$ vektor jeho rychlosti v naší vztažné soustavě. Zanedbáme-li pohyb v ose z (matematická kyvadla mívají minimální svislé výchylky), můžeme sílu vektorově napsat jako

$$\mathbf{F}_\mathrm{C} = 2m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\lambda \\ \Omega\sin\lambda \end{pmatrix} = 2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{y}\sin\lambda \\ -\dot{x}\sin\lambda \\ \dot{x}\cos\lambda \end{pmatrix},$$

kde jsme tečkami označili rychlost v osách x a y. Dále se omezme pouze na pohyb v rovině x, y. Působí zde také ještě složka tíhové síly. Matematické kyvadlo se chová analogicky s lineárnímu harmonickému oscilátoru a jeho pohyb v rovině x, y se řídí podle síly

$$\mathbf{F}_{x,y} = -m\omega_g^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

kde $\omega_g = \sqrt{g/L}$ je úhlová frekvence kmitů a x a y jsou výchylky kyvadla od rovnovážné polohy v obou kolmých směrech.

Výslednice obou sil udává pohybové rovnice kyvadla. Napíšeme je tedy pro složky x a y jako

$$m\ddot{x} = -m\omega_g^2 x + 2m\Omega\sin(\lambda)\,\dot{y}\,,$$
$$m\ddot{y} = -m\omega_g^2 y - 2m\Omega\sin(\lambda)\,\dot{x}\,.$$

Pro řešení této soustavy vyzkoušíme následující trik: obě rovnice nejprve pokrátíme, poté druhou z nich vynásobíme komplexní jednotkou i a nakonec je sečteme. Dostaneme

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\omega_g^2\left(x + iy\right) + 2\Omega\sin(\lambda)\left(\dot{y} - i\dot{x}\right)\,.$$

Z poslední závorky vytkeneme $-i$ a díky relaci $i^2 = -1$ můžeme celou rovnici vyjádřit jako

$$\ddot{u} = -\omega_g^2 u - 2i\Omega\sin(\lambda)\,\dot{u}\,,$$

kde $u = x + iy$ je naše nová, komplexní proměnná, která reprezentuje polohu kyvadla v Gaussovské rovině. Neudělali jsme nic jiného, než že jsme zapsali vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jako jedno komplexní číslo, čímž jsme ze dvou rovnic dostali pouze jednu.

Tato rovnice je analogická s rovnicí tlumeného harmonického oscilátoru, kde odporová síla je úměrná rychlosti pohybu. Řešením jsou tlumené kmity, kdy je kosinový průběh exponenciálně tlumen. Řešení rovnice tedy zkusíme zapsat jako

$$u = u_0\exp(i\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\,,$$

kde u_0 je nějaká (opět komplexní) amplituda. Dosazením do diferenciální rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
&-u_0\omega_1^2\exp(i\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) - i\omega_1\omega_2 u_0\exp(i\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) - i\omega_1\omega_2 u_0\exp(i\omega_1 t)\sin(\omega_2 t) - \\
&-u_0\omega_2^2\exp(i\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = -\omega_g^2 u_0\exp(i\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) - 2i\Omega\sin(\lambda)\,u_0 i\omega_1\exp(i\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) \\
&+2i\Omega\omega_2\sin(\lambda)\,u_0\exp(i\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\,.
\end{aligned}$$

Po pokrácení faktorem $u_0\exp(i\omega_1 t)$ a úpravách dostáváme

$$\begin{aligned}
&-\omega_1^2\cos(\omega_2 t) - 2i\omega_1\omega_2\sin(\omega_2 t) - \omega_2^2\cos(\omega_2 t) = \\
&= -\omega_g^2\cos(\omega_2 t) + 2\Omega\omega_1\sin(\lambda)\cos(\omega_2 t) + 2i\Omega\omega_2\sin(\lambda)\sin(\omega_2 t)\,.
\end{aligned}$$

Tato rovnice musí být splněna ve všech časech t, musí se tedy rovnat siny a kosiny zvlášť, proto ji můžeme rozdělit na dvě rovnice

$$\begin{aligned}
-2i\omega_1\omega_2\sin(\omega_2 t) = 2i\Omega\omega_2\sin(\lambda)\sin(\omega_2 t) \quad &\Rightarrow \quad \omega_1 = -\Omega\sin(\lambda)\,,\\
-\omega_1^2\cos(\omega_2 t) - \omega_2^2\cos(\omega_2 t) = -\omega_g^2\cos(\omega_2 t) + 2\Omega\omega_1\sin(\lambda)\cos(\omega_2 t) \quad &\Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_1^2}\,.
\end{aligned}$$

Foucaltova kyvadla mají délku závěsu v desítkách metrů, což odpovídá ω_g v řádu desetin Hz. To je asi o 4 řády více než Ω, proto můžeme v odmocnině člen ω_1^2 zanedbat vůči ω_g a dosadit do našeho vyjádření u

$$u = u_0 \exp(-i\Omega \sin(\lambda)\, t) \cos(\omega_g t)\ .$$

Kyvadlo se tedy kýve s úhlovou frekvencí ω_g, ale také koná otáčivý pohyb s úhlovou frekvencí $\Omega \sin(\lambda)$ (exponenciála s komplexním exponentem). Znaménko mínus v exponenciále nám dokonce říká, v jakém směru se bude rovina kývání otáčet.

Podle zadání se za čas $T = 8{,}5\,\mathrm{h}$ otočila rovina kyvu o 90°, což odpovídá

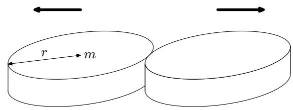
$$T\omega_1 = \frac{T 2\pi \sin\lambda}{24\,\mathrm{h}} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \arcsin\left(\frac{1}{4}\frac{24\,\mathrm{h}}{8{,}5\,\mathrm{h}}\right) \doteq 45^\circ\ .$$

Poznamenejme ještě, že jiné řešení (otočení o 270° nebo více) není možné.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha FH ... rozlučná dvojice

Dva identické válcové magnety o hmotnosti $m = 7{,}5\,\mathrm{g}$ a poloměru $R = 1{,}1\,\mathrm{cm}$ leží na vodorovné podložce a dotýkají se tak, že se odpuzují. Jakmile je pustíme, odjedou do vzdálenosti $x = 11\,\mathrm{cm}$ mezi jejich středy. Jaký je magnetický moment μ každého magnetu? Koeficient tření mezi magnety a podložkou je $f = 0{,}35$. Uvažujte dipól-dipólovou interakci mezi magnety.



Jarda se díky Jirkovi stal expertem na magnety.

Jaká magnetická síla působí mezi magnety? Můžeme využít poznatky z magnetostatiky, podle kterých je struktura magnetického pole dipólu nerozlišitelná od elektrostatického pole elektrického dipólu. Výpočet síly tak můžeme převést na výpočet z elektrostatiky. Uvažujme tedy, že magnetické dipóly nahradíme elektrickými. Pro ně platí $p = q\delta x$, kde q je náboj jednotlivých nábojů v dipólu a δx je jejich vzájemná vzdálenost. Protože se magnety odpuzují, musí mít například oba kladné náboje nahoře a oba záporné dole. Elektrostatická síla, kterou jeden magnet odpuzuje druhý, je

$$F = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{r^2} - \frac{rq^2}{\left(r^2 + (\delta x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\ .$$

Kde r je vzdálenost středů magnetů. Protože uvažujeme dipóly, je $\delta x \ll r$ a můžeme provést Taylorův rozvoj druhého členu, takže

$$F = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\delta x}{r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \approx \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\left(1 - 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{\delta x}{r}\right)^2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{r^4}p^2\ .$$

Nyní musíme přejít od elektrostatické síly k magnetické. Elektrický dipól nahradíme magnetickým μ a konstantu úměrnosti $1/4\pi\varepsilon$ nahradíme $\mu_0/4\pi$. Velikost síly tak je

$$F = \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{\mu^2}{r^4}\,,$$

kde r je vzdálenost středů magnetů. Potenciální energie soustavy na začátku proto je

$$E_\mathrm{i} = -\int_\infty^{2R} F\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu^2}{(2R)^3}\,.$$

Část této energie se přemění na práci vykonanou třecími silami. Pokud je posun jednoho z magnetů z počáteční polohy o $x/2 - R$, pak je tato práce rovna

$$W = 2mgf\left(\frac{x}{2} - R\right) = mgf(x - 2R)\,.$$

Po posunu je vzájemná vzdálenost středů magnetů x, jejich potenciální energie je proto

$$E_\mathrm{f} = -\int_\infty^{x} F\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu^2}{x^3}\,.$$

Ze zákona zachování energie tak dostáváme rovnost

$$E_\mathrm{f} + W = E_\mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad \mu = \sqrt{\frac{4\pi mgf(x-2R)}{\mu_0}\frac{x^3\,(2R)^3}{x^3 - (2R)^3}} = 0{,}49\,\mathrm{A{\cdot}m^2}\,.$$

Podle zadání jsme uvažovali dipól-dipólovou interakci mezi magnety. V případě reálných magnetů se s touto aproximací můžeme dostat do potíží, neboť magnety jsou obvykle vyrobeny z magnetovaného materiálu, který má nenulové rozměry. Alespoň v případě homogenní magnetizace můžeme magnety popsat pomocí plošného magnetického náboje a sílu potom počítat stejně jako v elektrostatice u plošných elektrických nábojů. Pro tyčový magnet, jehož výška je mnohem větší než průměr, poté dostaneme, že ve velkých vzdálenostech od magnetu magnetické pole odpovídá poli dipólu, neboť plošný náboj na podstavách aproximujeme bodovými náboji.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha GA ... zas tam jedna zůstala!

Jarda hrál se svými kamarády bowling, ale jako vždycky se mu nedařilo. Už to konečně vypadalo, že dá strike, ale zase tam zůstala stát jedna kuželka. To už se Jarda vážně naštval a do druhého hodu dal takovou energii, že se koule pohybovala rychlostí $0{,}7c$. *Kupodivu se do kuželky trefil, nastal nepružný náraz a oba předměty se spojili v jeden. Jakou budou mít po zastavení dohromady hmotnost, když koule měla před hodem hmotnost* $M = 7{,}0\,\mathrm{kg}$ *a kuželka* $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$*?* *Jarda se bojí, že by na bowlingu přibral.*

Protože se koule pohybuje velmi vysokou rychlostí, musíme uvažovat speciální teorii relativity. Stále nám platí zákon zachování hybnosti, a ačkoli jde o nepružnou srážku, tak i zákon zachování energie. Budeme totiž předpokládat, že energie srážky se přemění na hmotnost.

Musíme ovšem počítat s relativistickými hybnostmi a dalšími úpravami. Pokud má těleso klidovou hmotnost M a rychlost v, je jeho celková energie (tj. včetně klidové)

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,.$$

Relativistická hybnost je

$$p = \frac{Mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,.$$

Takto jsme vlastně definovali energii a hybnost před srážkou, když M je hmotnost koule a $v = 0{,}7c$ je její rychlost.

Označme μ klidovou hmotnost kuželky a koule (ať už to vypadá jakkoli) po srážce a u jejich společnou rychlost. Pak je hybnost po srážce

$$p = \frac{\mu u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

a energie

$$E = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}\,.$$

Hybnosti před srážkou a po srážce se rovnají, ke kinetické energii koule ještě přičteme klidovou energii kuželky. Dostáváme dvojici rovnic

$$\frac{Mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\mu u}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

a

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + mc^2 = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}\,.$$

Pravou stranu druhé rovnice dosadíme do první a vyjádříme u jako

$$\frac{v}{1 + \frac{m}{M}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = u\,.$$

Dosadíme do předchozí rovnice a máme

$$\mu = M\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{m}{M}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^2 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 8{,}98\,\mathrm{kg}\,.$$

Je tedy zřejmé, že klidová hmotnost po srážce je větší než součet hmotností před srážkou.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha GB ... 21 zentimeter

Neutrální vodík v mezihvězdném prostoru může vyzářit foton o vlnové délce $\lambda = 21\,\mathrm{cm}$, když přejde z vyššího energetického stavu do nižšího. Střední doba života ve vyšším energetickém stavu je $\tau = 1{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{let}$. Na obloze jsme detekovali kulový zdroj tohoto záření, ze kterého přichází zářivý tok $F = 1{,}5 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Průměr zdroje je $d = 15\,\mathrm{ly}$ a vzdálenost od Země $R = 21\,000\,\mathrm{ly}$. Určete hustotu hmotnosti vodíku v oblaku (zdroji záření).

Jarda poslouchal německou písničku.

Zářivý tok F odpovídá

$$n = \frac{F\lambda}{hc}$$

fotonům dopadajícím na metr čtvereční za sekundu. Označme R vzdálenost zdroje od Země, pak z něj odlétá

$$A = 4\pi R^2 n$$

fotonů za sekundu, což odpovídá aktivitě celého zdroje. Z té vypočítáme počet jader vodíku v oblaku

$$N = A\tau = 4\pi R^2 n\tau\,.$$

Tady je ale potřeba se zamyslet. Číslo N udává počet atomů, které jsou schopny vyzářit foton, musí se tedy nacházet na vyšší energetické hladině. Přechod s vlnovou délkou 21 cm totiž nastává při změně vzájemné orientace spinu elektronu a protonu v atomu. Z Boltzmannova rozdělení musíme určit pravděpodobnost, že se atom nachází na vyšší energetické hladině. Protože je teplota v řádech kelvinů, jsou vzhledem k velmi malé energii přechodu všechny mikrostavy obsazené se stejnou pravděpodobností ($k_\mathrm{B}T \gg hc/\lambda$). Vodíkový plyn bude mít totiž nejméně teplotu reliktního záření $T = 2{,}7\,\mathrm{K}$ (ale spíš bude mít vyšší teplotu, neboť vodíková mračna se nacházejí uvnitř galaxií, takže jsou zahřívána zářením z hvězd), zatímco teplota zářivého přechodu vodíku je $T_\lambda = hc/(\lambda k_\mathrm{B}) = 0{,}068\,5\,\mathrm{K}$.

Už bychom měli téměř hotovo s tím, že celkový počet atomů je tak dvakrát vyšší než N. Jenže Boltzmannovo rozdělení udává pravděpodobnost mikrostavu, nikoli energetické hladiny. Z kvantové mechaniky se dá dokázat, že složení spinu elektronu a protonu se dá provést čtyřmi způsoby, z nichž tři mají vyšší energii a jen jeden nižší. Stav atomu s vyšší energií tak bude z Boltzmannova rozdělení zastoupen třikrát více, než stav s nižší energií. Celkový počet atomů vodíku tak je $4/3N$.

Všechna jádra vodíku v oblaku vynásobíme hmotností každého z nich, tedy m_u. Abychom zjistili hustotu, vydělíme celou hmotnost objemem kulového oblaku. Dostáváme

$$\rho = \frac{m_\mathrm{u}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3}\frac{4N}{3} = \frac{32 m_\mathrm{u} R^2 F\lambda\tau}{hcd^3} = 4{,}1 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

V rámci naší časové škály můžeme uvažovat zastoupení atomů na vyšší energetické hladině za stálé, ve vodíkovém mračnu se totiž neustále vytvářejí nové excitované atomy. Děje se tak kvůli náhodným srážkám mezi nimi, které jsou sice vzácné, ale na druhou stranu má excitovaný stav vodíku hodně dlouhou střední dobu života. Tepelná kinetická energie atomů vodíku je přitom řádově větší než energie nutná k překlopení spinů, takže je zde dostatek energie pro neustálou excitaci.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha GC ... Pew Pew

Tomáš s Viktorem posunuli své airsoftové zápasy na nový level, a to do vesmíru. V jaké minimální vzdálenosti od Viktorova laserového děla musí Tomáš začínat svůj přímočarý zrychlený pohyb tak, aby ho laserový pulz vystřelený přímo na něj nikdy nedostihl? Uvažujte, že klidová hmotnost Tomáše spolu s jeho vozidlem je m_0 a jeho pohyb je urychlovaný konstantní silou f. Celou situaci sledujme ze soustavy spojené s nehybným Viktorem a dále uvažujme, že výstřel z laserového děla a začátek Tomášova pohybu v této soustavě proběhly současně.

Marek J. zjistil, že světlu se dá uniknout.

Vďaka vedomosti, že rýchlosť svetla vo vákuu je maximálna dosiahnuteľná rýchlosť by sa mohlo zdať, že Tomáš nemôže svetlu unikať donekonečna. Presne to sa však v tomto prípade deje! Intuitívne zdôvodnenie si necháme nakoniec, v tejto chvíli poďme tento neintuitívny fakt proste spočítať.

Na úlohu vieme nazerať jednorozmerne, učiňme tomu tak. Aj v prípade relativistickej mechaniky platí rovnica

$$f = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,,$$

ale s jednou dôležitou obmenou. Tá sa týka hybnosti: $p = mv$, kde m je takzvaná „relativistická“ hmotnosť/energia, $m = \gamma m_0$ s Lorentzovským faktorom $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vidíme, že m sa mení s meniacou rýchlosťou v. Potrebujeme tak vyriešiť nasledujúcu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{cm_0v}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) = f\,,$$

kde iba rýchlosť Tomáša v závisí na čase. Priamou integráciou a následným vyriešením kvadratickej rovnice pre v dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \frac{ft}{m_0\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0c}\right)^2}}\,. \tag{9}$$

Znova integrujeme podľa času, tentokrát integrál pravej strany rovnice (9) vyriešime pomocou substitúcie $ft/m_0c = \sinh u$ a pre trajektóriu Tomáša dostávame

$$x = \frac{m_0c^2}{f}\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0c}\right)^2} + C\,,$$

kde hodnotu integračnej konštanty C určíme z počiatočnej podmienky, kedy v čase $t = 0$ je Tomáš od Viktora vo vzdialenosti d. Potom $C = d - m_0c^2/f$.

Ak by svetelný lúč Tomáša dobehol, existoval by prienik v trajektóriách resp. čas pretnutia

$$ct = \frac{m_0c^2}{f}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0c}\right)^2} - 1\right] + d\,. \tag{10}$$

Poďme sa pozrieť ako závisí táto podmienka na d. Asi najľahšie môžeme začať tým, že položíme $d = m_0c^2/f$, potom dostaneme z rovnice (10)

$$\frac{ft}{m_0c} = \sqrt{1 + \left(\frac{ft}{m_0c}\right)^2}\,,$$

čo pre žiadny čas t nemôže nastať (pravá strana je vždy väčšia). A teda $d = m_0c^2/f$ je určite dostatočná vzdialenosť, kedy Viktor Tomáša netrafí. My sa však pýtame na minimálnu vzdialenosť. Uvažujme teda $d = m_0c^2/f - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je typicky veľmi malé. Uvedomme si ešte, že nám stačí uvažovať $\varepsilon < m_0c^2/f$, pretože inak by sme dostávali $d < 0$. Po dosadení za d do vzťahu (10) dostaneme pre čas vzťah

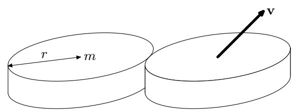
$$t = \frac{1 - \frac{f^2}{m_0^2c^4}\varepsilon^2}{\frac{2f^2}{m_0^2c^3}\varepsilon}\,,$$

kedy pre kladné časy dostávame riešenie vždy keď $0 < \varepsilon < m_0c^2/f$ (podmienka na kladný čitateľ). Inými slovami, pre ľubovoľné nami uvažované zmenšenie vzdialenosti $d = m_0c^2/f$ nachádzame čas, kedy lúč Tomáša dostihne. Ukázali sme teda, že $d = m_0c^2/f$ je onou hľadanou minimálnou vzdialenosťou. K tomuto sa dá prísť aj uvážením geometrických vlastností hyperboly.

Nakoniec patrí sľúbená intuitívna predstava sťa Zenonov paradox. Môžeme si predstaviť, že svetlo, podobne ako Achilles dobiehajúci korytnačku, dorazí na miesto, z ktorého sa už Tomáš presunul. Situácia sa však líši od Achilla a korytnačky. Tí sa pohybujú konštantnými rýchlosťami a vzdialenosť, o ktorú Achilles minie korytnačku, sa po každom „kroku“ dostatočne skráti na to aby Achilles korytnačku dobehol v konečnom čase. V prípade svetla a Tomáša sa táto vzdialenosť neskracuje dostatočne rýchlo, pretože Tomáš na rozdiel od svetla (a korytnačky) v každom kroku zrýchľuje. Svetlo ho tak nedosiahne v konečnom čase (dosiahne ho až v nekonečne).

Marek Jankola
`marekj@fykos.cz`

Úloha GD ... nerozlučná dvojice



Dva identické válcové magnety o hmotnosti $m = 7{,}5\,\mathrm{g}$*, poloměru* $r = 1{,}1\,\mathrm{cm}$ *a dipólovém momentu* $\mu = 1{,}1\,\mathrm{A{\cdot}m^2}$ *leží na dokonale hladké podložce. Jsou na sebe nalepené tak, že se přitahují. Jaká může být maximální rychlost* v*, kterou jednomu z magnetů udělíme vzhledem k podložce kolmo na spojnici jejich středů, aby se nerozpojily? Zanedbejte tření mezi magnety. Uvažujte dipól-dipólovou interakci mezi magnety.* *Jarda se nechtěl rozloučit s přítelkyní.*

Nejprve se přeneseme do těžišťové soustavy, kde magnety obíhají společný bod dotyku. Rychlost středu každého magnetu vůči těžišti bude $v/2$.

V úloze FH – „Rozlučná dvojice“ – jsme ukázali, že přitažlivá síla mezi magnety je rovna (přesněji řečeno, výsledek jsme odvodili pro odpudivou sílu, není ovšem těžké si rozmyslet, že v případě, kdy se magnety přitahují, má síla stejnou velikost a opačný pouze směr):

$$F_\mathrm{m} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mu^2}{(2r)^4}\,,$$

neboť $2r$ je vzdálenost mezi středy magnetů. Tato síla musí být větší než odstředivá. Její hodnota je

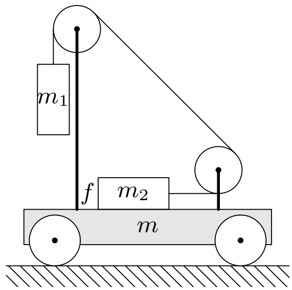
$$F_\mathrm{o} = m\omega^2 r = m\left(\frac{v}{2r}\right)^2 r\,.$$

Z krajní podmínky při rovnosti obou sil dostáváme

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m^2}{(2r)^4} = m\left(\frac{v}{2r}\right)^2 r \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{3\mu_0}{16\pi}\frac{\mu^2}{mr^3}} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha GE ... samochod



Na obrázku vidíte vozíček se dvěma závažími, jež jsou mezi sebou spojeny lanem a soustavou kladek. Hmotnosti kvádříků jsou $m_1 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ a hmotnost vozíčku je $m = 3{,}0\,\mathrm{kg}$. Mezi kvádrem m_2 a povrchem vozíčku je koeficient tření $f = 0{,}40$. Kladky i lano jsou nehmotné a bez tření. Na jaké hodnotě se ustálí zrychlení vozíčku, když obě závaží i vozíček uvolníme? Předpokládejte, že soustava rychle dosáhne ustáleného stavu. Obrázek odpovídá stavu před uvolněním obou závaží a vozíčku. *Jarda nechává Jindru psát řešení svých úloh.*

Nejdříve se pokusme uhádnout, kterým směrem bude vozíček zrychlovat. Kvádr m_2 se začne pohybovat směrem doprava, lano jej bude tahat silou T. Tato síla se přenáší na kladku, kde podle zákona akce a reakce urychluje vozíček směrem doleva. Jak uvidíme později, na vozík bude ve skutečnosti působit více sil, ale budeme předpokládat, že síla T dominuje.

Nazvěme zrychlení vozíku A. Pokud má A kladné znaménko, vozík zrychluje doleva. Zrychlení vozíčku ale vytvoří setrvačné síly působící na kvádříky ve vztažné soustavě spojené s vozíkem. Přesuňme se tedy do vztažné soustavy spojené s vozíkem a napišme si rovnice, kterými se pohyb kvádříků bude řídit. Lano přenáší tahovou sílu T. Díky spojení lanem budou oba kvádříky zrychlovat se stejným zrychlením a. Jelikož vozík zrychluje směrem doleva, setrvačná síla bude působit doprava. Druhý Newtonův zákon pro kvádr m_2 ve vodorovném směru říká

$$m_2 a = T + m_2 A - f m_2 g\,, \tag{11}$$

kde $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení.

Díky zrychlování vozíku nebude kvádr m_1 viset kolmo dolů, ale nakloní se pod úhlem α doprava od kolmice. Pro úhel α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A}{g}\,. \tag{12}$$

Na kvádr působí tahová síla T podél lana, tíhová síla $m_1 g$ směrem dolů a setrvačná síla $m_1 A$ směrem doprava. Kvádr m_1 zrychluje se zrychlením a ve směru podél lana stejně jako kvádr m_2. Druhý Newtonův zákon ve svislém směru říká

$$m_1 a \cos\alpha = m_1 g - T\cos\alpha \tag{13}$$

a ve vodorovném směru

$$m_1 a \sin\alpha = m_1 A - T\sin\alpha\,. \tag{14}$$

Jako první si ale ověříme, že kvádry se navzdory tření rozpohybují, když bude vozík v klidu. V tom případě bude $A = 0$ a $\alpha = 0$. Musíme vyřešit soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} m_2 a &= T - f m_2 g\,, \\ m_1 a &= m_1 g - T\,, \end{aligned}$$

se dvěma neznámými T a a. Z první rovnice vyjádříme

$$T = m_2 a + f m_2 g,$$

dosadíme do druhé rovnice a osamostatníme zrychlení a

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - m_2 a \ - f m_2 g\,, \\ a &= \frac{m_1 - f m_2}{m_1 + m_2} g\,. \end{aligned}$$

Kvádříky se rozpohybují, jen pokud zrychlení a vyjde kladné. V našem případě platí $m_1 = 1{,}5\,\mathrm{kg} > f m_2 = 0{,}4\,\mathrm{kg}$, tudíž soustava se rozpohybuje.

Můžeme se tedy vrátit k soustavě rovnic (11), (13), (14) popisující pohyb kvádříků ve vztažné soustavě zrychlujícího vozíku. Vyskytují se v nich čtyři neznámé T, α, a, A. Rovnice (12) je lineárně závislá s rovnicemi (13) a (14), takže žádnou informaci navíc nepřidává. Proto potřebujeme ještě čtvrtou rovnici – druhý Newtonův zákon pro vozíček. Na vozík působí na pravé kladce reakce od lana T směrem doleva. Na levé kladce působí síla $T \sin \alpha$ směrem doprava. Od kvádříku m_2 působí reakce třecí síly $f m_2 g$ směrem doprava. Tahové síly působící na úseku lana mezi oběma kladkami se navzájem vyruší a vozík neurychlují. Ve vztažné soustavě spojené s vozíkem ještě na vozík působí setrvačná síla mA směrem doprava zrychlení vozíku je nulové. Dostaneme tudíž rovnici

$$0 = T - T \sin \alpha - f m_2 g - mA.$$

Máme tedy soustavu čtyř rovnic

$$\begin{aligned} m_1 a \cos \alpha &= m_1 g - T \cos \alpha\,, \\ m_1 a \sin \alpha &= m_1 A - T \sin \alpha\,, \\ m_2 a &= T + m_2 A - f m_2 g\,, \\ 0 &= T - T \sin \alpha - f m_2 g - mA\,, \end{aligned}$$

se čtyřmi neznámými T, α, a, A. Ze vztahu (12) můžeme vyjádřit zrychlení $A = g \operatorname{tg} \alpha$, a tak se zbavit jedné neznámé

$$\begin{aligned} m_1 a \cos \alpha &= m_1 g - T \cos \alpha\,, \\ m_2 a &= T + m_2 g \operatorname{tg} \alpha - f m_2 g\,, \\ 0 &= T(1 - \sin \alpha) - f m_2 g - mg \operatorname{tg} \alpha\,. \end{aligned}$$

Pokud najdeme úhel α, pak ze vztahu (12) můžeme dopočítat zrychlení vozíku A. Proto z první rovnice vyjádříme

$$a = \frac{g}{\cos \alpha} - \frac{T}{m_1}$$

a dosadíme do dalších dvou rovnic

$$\frac{m_2 g}{\cos\alpha} - \frac{m_2}{m_1}T = T + m_2 g \operatorname{tg}\alpha - f m_2 g\,,$$
$$0 = T(1-\sin\alpha) - f m_2 g - m g \operatorname{tg}\alpha\,,$$

čím se zbavíme další neznámé. Nyní z první rovnice vyjádříme tahovou sílu

$$T = \frac{m_2 g - m_2 g \sin\alpha + f m_2 g \cos\alpha}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\cos\alpha}\,,$$

dosadíme do druhé rovnice, a tím dostaneme jednu rovnici s jedinou neznámou α, kterou musíme vyřešit numericky

$$0 = m_2 g(1-\sin\alpha)\frac{1-\sin\alpha + f\cos\alpha}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\cos\alpha} - f m_2 g - m g \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Rovnici budeme řešit iterační metodou, kdy na levé straně osamostatníme neznámou a na pravé straně nám vznikne nějaká funkce neznámé

$$\alpha = f(\alpha)\;.$$

Nejdříve učiníme počáteční odhad řešení $\alpha = \alpha_0$, který dosadíme do funkce a spočítáme druhý odhad řešení $\alpha_1 = f(\alpha_0)$. Každý následující odhad řešení α_{i+1} spočítáme z předchozího odhadu jako

$$\alpha_{i+1} = f(\alpha_i)\;. \tag{15}$$

Pokud máme štěstí, hodnoty α_i budou konvergovat k jedné hodnotě. Pak záleží jen na nás, kdy se spokojíme s přesností výsledku α_i a ukončíme iterace. Pokud posloupnost (15) diverguje, musíme rovnici přeskládat, vyjádřit neznámou pomocí jiné funkce $\alpha = f'(\alpha)$ a iterovat znovu.

My použijeme funkci

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{m_2}{m}(1-\sin\alpha)\frac{1-\sin\alpha + f\cos\alpha}{\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\cos\alpha} - f\frac{m_2}{m}\right).$$

S počátečním odhadem $\alpha_0 = 4{,}0\,^\circ$ v několika krocích dokonvergujeme k řešení $\alpha = 5{,}78\,^\circ$. S pomocí rovnice (12) pak spočítáme zrychlení vozíku $A = g\operatorname{tg}\alpha = 0{,}993\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \doteq 0{,}99\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha GF ... rozpadající se úloha

Radioaktivní jádra fykosia získáváme z jaderné reakce, která jich vytváří P za vteřinu. Pokud v čase $t = 0$ máme N_F jader fykosia, jaká bude jejich aktivita v čase T, tedy kolik se jich bude rozpadat za sekundu? Víme, že poločas rozpadu fykosia je $T_{1/2}$.

Marek procházel samovolným rozkladem osobnosti.

Počet rozpadajících se jader je úměrný celkovému počtu jader s konstantou úměrnosti $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ (s jednotkou $\mathrm{s^{-1}}$). Jádra zároveň přibývají rychlostí P, proto pro derivaci počtu jader N platí

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + P\,,$$

kde λ je rozpadová konstanta fykosia.

Pak

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda N &= P\,,\\
\mathrm{e}^{\lambda t}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} + \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} N &= \mathrm{e}^{\lambda t} P\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\lambda t} N\right) &= \mathrm{e}^{\lambda t} P\,,\\
\mathrm{e}^{\lambda t} N &= \int \mathrm{e}^{\lambda t} P\,\mathrm{d}t\,,\\
N(t) &= C\mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{P}{\lambda}\,,
\end{aligned}
$$

kde C je neznámá integrační konstanta. Tu určíme z toho, že $N(0) = N_{\mathrm{F}}$, proto

$$C = N_{\mathrm{F}} - \frac{P}{\lambda}$$

a

$$N(t) = N_{\mathrm{F}}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \frac{P}{\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\,.$$

Aktivita vzorku je počet rozpadů za čas. Spočteme proto, jak se mění počet jader s časem.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N_{\mathrm{F}}\mathrm{e}^{-\lambda t} + P\mathrm{e}^{-\lambda t} + (P - P) = -\lambda N_{\mathrm{F}}\mathrm{e}^{-\lambda t} - P\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) + P\,.$$

Když porovnáme výsledek s první rovnicí, vidíme, že rozpadům přísluší první dva členy, zatímco poslední určuje přibývání jader z reakce a k aktivitě nepřispívá. Nakonec si ještě uvědomíme, že $T_{1/2} = \ln 2/\lambda$ a po úpravě exponenciál dostaneme

$$A(T) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_{\mathrm{F}} 2^{-\frac{T}{T_{1/2}}} + P\left(1 - 2^{-\frac{T}{T_{1/2}}}\right)\,.$$

Marek Milička
`marek.milicka@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Organizátoři

Generální partner

Platinový partner

Stříbrní partneři

Partneři

Za podpory