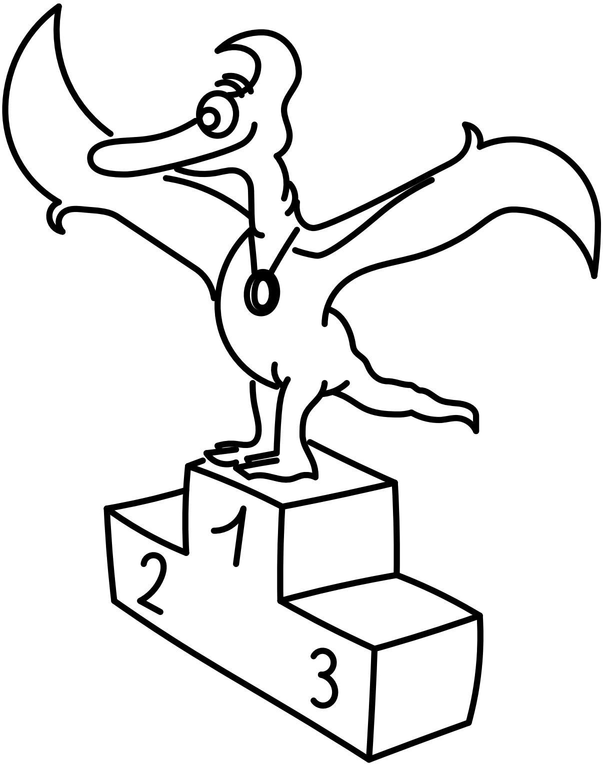
# Řešení úloh

Fyziklani



## Úloha AA ... teče to

*Reaktor o výkonu* 250 MW *je chlazen vodním čerpadlem s objemovým průtokem* 1 200 h$\ell$ *za minutu. Pokud voda proteče reaktorem pouze jednou, o kolik se zvýší její teplota? Tepelné ztráty neuvažujte.*

*Pepa kradl z učebnice.*

Výkon reaktoru nám udává, že reaktor do okolí odevzdá teplo $Q = 250\,\mathrm{MJ}$ za 1 s. Za tuto sekundu reaktorem proteče $\Delta V = 20\,\mathrm{h\ell}$ vody o hmotnosti $m = \rho \Delta V$. Dosadíme do známého vztahu $Q = mc\Delta T$ a vyjádříme si změnu teploty proteklé vody jako

$$\Delta T = \frac{Q}{c\rho\Delta V}\,,$$

což po číselném dosazení činí přibližně 30 K.

***Josef Trojan***
`josef.trojan@fykos.cz`

## Úloha AB ... blátivá

*Pták Fykosák se vydal sáňkovat. Stráň, ze které jezdí, má kolmou výšku* 10 m *a dráha dolů z kopce je dlouhá* 20 m. *Mezi sněhem už je ale vydřená tráva a trochu bláta, což sáňky brzí, takže Fykosák se po jízdě z kopce zastaví ve vzdálenosti* 30 m *od paty kopce. Jaký je koeficient tření mezi sáňkami a zemí? Ostatní odporové síly zanedbejte.*

*Za Verčiných mladých let se ještě dalo v zimě sáňkovat.*

Třecí síla působící během jízdy musí být tak velká, aby na dané dráze vykonala práci rovnou potenciální energii Fykosáka na kopci. Během jízdy z kopce působí třecí síla $F_1 = mgf\cos\alpha$, kde $f$ je hledaný koeficient tření a úhel $\alpha$ je sklon kopce. Kosinus tohoto úhlu získáme z Pythagorovy věty

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{s}\,,$$

kde $h$ je výška stráně a $s$ je délka dráhy. Dole pod kopcem pak už není dráha skloněna o žádný úhel, takže třecí síla je $F_2 = mgf$. Označíme-li vzdálenost, po které se Fykosák zastaví, jako $d$, dostaneme

$$\begin{aligned} W &= E_\mathrm{p}\,,\\ F_1 s + F_2 d &= mgh\,,\\ mgfs\cos\alpha + mgfd &= mgh\,,\\ f = \frac{h}{s\cos\alpha + d} &= \frac{h}{\sqrt{s^2 - h^2} + d}\,. \end{aligned}$$

Výsledný součinitel pak vychází zhruba $f \doteq 0{,}21$, nezávislý na hmotnosti Fykosáka i tíhovém zrychlení.

***Veronika Hendrychová***
`vercah@fykos.cz`

## Úloha AC ... jack

*O kolik minut se prodlouží výdrž mobilního telefonu, když se výrobce rozhodne vypustit jack na sluchátka a místo toho zvětšit baterii? Jack by zabíral místo, které je ekvivalentní válci o průměru* 3,5 mm *a délce* 1,5 cm. *Typická baterie o velikosti* 20 cm$^3$ *vystačí na* 15 h *aktivního používání.*

*Matěj rád sleduje nové trendy ve smartphonech.*

Uvažujeme, že kapacita baterie je přímo úměrná její velikosti. Ze zadaných hodnot tak lze přepočítat výdrž baterie na objem

$$\frac{t}{V} = \frac{15\,\mathrm{h}}{20\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}75\,\mathrm{h{\cdot}cm^{-3}}\,.$$

Ušetřený objem spočteme jednoduše jako objem válce $\Delta V$

$$\Delta V = \pi \cdot \left(\frac{0{,}35\,\mathrm{cm}}{2}\right)^2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 0{,}144\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Výsledné zvýšení času aktivního používání získáme vynásobením těchto dvou hodnot

$$\Delta t = \frac{t}{V}\Delta V \doteq 0{,}11\,\mathrm{h} \doteq 6{,}5\,\mathrm{min}\,.$$

Pokud má mobil konektor na sluchátka, přichází tak pouze o několik minut výdrže, čili to není příliš relevantní důvod, proč výrobci jack postupně opouštějí. Důležitější se tak jeví lepší voděodolnost nebo fakt, že lidé pak utratí více peněz za bezdrátová sluchátka.

***Matěj Mezera***
`m.mezera@fykos.cz`

## Úloha AD ... odměna pro vítěze Fyziklání

*Ve FYKOSu jsme uvažovali, že pro nejlepší týmy ve Fyziklání necháme vyrobit hodnotné pamětní mince. Pro vítěze by byly 18-karátové zlaté mince (zbytek by tvořilo stříbro), které by měly hodnotu* $c_1 = 31\,000\,Kč$. *Za druhé místo by se udělovaly stříbrné mince o ceně* $c_2 = 1\,100\,Kč$. *Stříbrné mince by měly dvakrát větší hmotnost než ty zlaté. Kolikrát vyšší je jednotková cena zlata než stříbra? Cenu ražby neuvažujte. Jeden karát je* 1/24 *hmotnosti celku.*

*Jarda kdysi vyhrál svítící klávesnici.*

Označme hmotnost zlaté mince $m$. Hmotnost stříbrné mince pak je $2m$. Zároveň dle definice karátu tvoří tři čtvrtiny $\left(\frac{18}{24}\right)$ hmotnosti první mince zlato, tedy $m_\mathrm{z} = \frac{3}{4}m$.

Cena stříbra na jednotku $m$ je $j_\mathrm{s} = \frac{c_2}{2m}$. Cena zlata na jednotku $m$ je

$$j_\mathrm{z} = \frac{c_\mathrm{z}}{m_\mathrm{z}} = \frac{c_1 - j_\mathrm{s}\frac{m}{4}}{\frac{3m}{4}}\,.$$

Poměr těchto jednotkových cen tak je

$$\frac{j_\mathrm{z}}{j_\mathrm{s}} = \frac{c_1 - \frac{c_2}{8}}{\frac{3c_2}{8}} = \frac{8c_1 - c_2}{3c_2} \doteq 74{,}8\,.$$

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha AE ... safra zúžení

*Když jedeme po dálnici a probíhá rekonstrukce, stává se, že z původních tří jízdních pruhů s maximální povolenou rychlostí* $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *pokračují pouze dva pruhy s omezením na* $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. *O kolik procent se sníží maximální počet aut, které mohou po dálnici projet za jednu hodinu při optimálním provozu? Auta jezdí maximální povolenou rychlostí ve všech pruzích a mají mezi předními nárazníky časové rozestupy* $2\,\mathrm{s}$. *Srovnejte silnici jednoho dne bez zúžení a jiného dne se zúžením.* *Karel jezdil po D1 (jak v ČR, tak v SR).*

Řešení je trochu překvapivé, protože máme-li mít mezi auty stále konstantní časový rozestup, jedno auto projede jedním jízdím pruhem právě po čase $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$. Pokud se tedy změní rychlost aut, změní se jejich rozestupy, ale nezmění se celkový počet aut, který po silnici projede. Jsou-li všechny pruhy „zaplněné“ až na dané rozestupy (které navíc měříme mezi předními nárazníky, aby nám situaci nekomplikovala délka auta), dostáváme, že bude záležet pouze na počtu jízdních pruhů. Počet aut, která projedou při optimálním provozu, se tedy sníží na $2/3 \doteq 0{,}667 = 66{,}7\,\%$. Protože se zadání ptá, o kolik se kapacita sníží, odpovědí bude $1 - 2/3 = 1/3 \doteq 0{,}333 = 33{,}3\,\%$.

Kdybychom uvažovali rozestupy vzdálenostní, bylo by řešení o něco složitější. Doporučuje se ale dodržovat rozestupy časové hlavně kvůli reakční době řidiče, kterou obvykle považujeme za neměnnou vůči rychlosti auta, které při vyšších rychlostech ujede větší vzdálenost. Při využití konstantních vzdáleností mezi auty by tak mohlo být velmi nebezpečné jezdit při vysokých rychlostech a přehnaně bezpečné jezdit s takovými rozestupy ve městech.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha AF ... ach, ty Newtonovy zákony

*Jak velká vnější odporová síla působí na auto jedoucí po rovině stálou rychlostí* $30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, *pokud má motor příkon* $150\,000\,\mathrm{W}$ *a tah* $3\,000\,\mathrm{N}$? *Teplota okolního vzduchu je* $37\,\mathrm{^\circ C}$.
*Robert tuto úlohu prostě vymyslel!*

Jelikož jede auto stálou rychlostí, musí být síly na něj působící v rovnováze (podle prvního Newtonova zákona). Odporové síly se vyrovnávají s tahem motoru (tíhová síla je celá kompenzovaná reakcí silnice a jiné síly působící na auto nemáme). Všechny ostatní informace v zadání jsou nám k ničemu – odpověď je tedy $3\,000\,\mathrm{N}$.

***Robert Gemrot***
robert.gemrot@fykos.cz

## Úloha AG ... toaletní vandalismus

*Role toaletního papíru má tvar válce s výškou $v = 9{,}4\,\mathrm{cm}$ a s vnějším průměrem $D_2 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$. Dutý kartonový válec v jeho středu má průměr $D_1 = 4\,\mathrm{cm}$ a tloušťka jednotlivých obdélníčků je $h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Nejméně kolik rolí bychom potřebovali na obalení celého povrchu Země jednou vrstvou toaletního papíru, pokud předpokládáme, že v jedné roli je papír navinutý zcela hustě a že spirálovité navinutí papíru na kartonovém válci umíme aproximovat válcovitými vrstvičkami? Výsledek udejte na dvě platné číslice.* *Robo přemýšlí nad úkoly na neobvyklých místech.*

Využitím aproximácie zo zadania vieme, že rolka toaletného papiera má

$$n = \frac{\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2}}{h}$$

papierových vrstiev. Chceme spočítať celkovú dĺžku papiera obsiahnutého v jednej rolke, zistíme teda súčet obvodov spomínaných vrstiev. Dostávame sumu

$$l = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{D_1}{2} + ih\right) = 2n\pi\frac{D_1}{2} + 2\pi h\sum_{i=1}^{n} i = n\pi D_1 + 2\pi h\frac{(n+1)\,n}{2}\,,$$

kde $l$ je teda celková dĺžka rozvinutého toaletného papiera (zodpovedajúceho jednej rolke). Po dosadení za $n$ máme

$$l = \frac{\pi D_1\,(D_2 - D_1)}{2h} + \frac{\pi\,(D_2 - D_1)}{2}\left(\frac{D_2 - D_1}{2h} + 1\right)\,,$$

a po príslušnej úprave

$$l = \frac{\pi}{4h}\,(D_2 - D_1)\,(D_1 + D_2 + 2h)\,.$$

Teraz sa vrátime naspäť k valcovému tvaru toaletného papiera. Plocha jedného rozvinutého papiera je $S_0 = vl$ a plocha povrchu Zeme je $S = 4\pi R_\oplus^2$, teda minimálny počet toaletných papierov potrebných na obalenie celého Zemského povrchu je

$$N = \frac{S}{S_0} = \frac{4\pi R_\oplus^2}{vl} = \frac{16hR_\oplus^2}{v\,(D_2 - D_1)\,(D_2 + D_1 + 2h)} \doteq 2{,}5\cdot 10^{14}\ \text{toaletných papierov}\,.$$

***Robert Jurenka***
`robert.jurenka@fykos.cz`

## Úloha AH ... čas zazářit

*Nadační fond Neuron podporuje české nadané vědce a jejich nadějné projekty. Jarda doufá, že by se za svůj výzkum v oblasti mikrosvěta jednou mohl stát laureátem prestižní Ceny Neuron. Proto usilovně pracuje se svým elektronovým mikroskopem s urychlovacím napětím $U = 1{,}5\,\mathrm{kV}$, díky kterému vidí mnohem větší detaily než v mikroskopu světelném. Elektrony v mikroskopu mají vlnovou délku $\lambda$. Určete, jaký je poměr energie fotonů o této vlnové délce ku kinetické energii urychlených elektronů.* *Jarda vymýšlí úlohy i na Nový rok.*

Vyjádříme si de Broglieho vlnovou délku elektronu $\lambda$, jež je určena jako

$$\lambda = \frac{h}{p}\,,$$

kde $h$ je Planckova konstanta a $p$ je hybnost daného objektu.

Protože součin urychlovacího napětí a náboje částic je malý v porovnání s klidovou energií elektronů vyjádřenou v jednotce elektronvolt ($1{,}5\,\mathrm{keV} \ll 510\,\mathrm{keV}$), nemusíme používat relativistické vztahy. Hybnost je tak určena jako $p = mv$, kde rychlost najdeme ze zákona zachování energie jako

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_\mathrm{e}}}\,,$$

přičemž $m_\mathrm{e}$ je hmotnost elektronu a $e$ je jeho náboj.

Dosazením všech předchozích poznatků do první rovnice určíme vlnovou délku elektronů jako

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_\mathrm{e}v} = \frac{h}{\sqrt{2m_\mathrm{e}Ue}}\,.$$

Energie fotonu o stejné vlnové délce je

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = c\sqrt{2m_\mathrm{e}Ue}\,.$$

Už výše jsme vyjádřili kinetickou energii elektronů $E_\mathrm{e}^\mathrm{kin} = Ue$. Hledaný poměr tedy je

$$\frac{E_\gamma}{E_\mathrm{e}^\mathrm{kin}} = c\sqrt{\frac{2m_\mathrm{e}}{Ue}} \doteq 26{,}1\,.$$

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha BA ... pokrývání nanočástic

*Nanočástice tvaru koule o průměru $d = 20\,\mathrm{nm}$ jsou s molární koncentrací $c_1 = 9\cdot 10^{-9}\,\mathrm{mol}\cdot\ell^{-1}$ rozptýleny v roztoku o celkovém objemu $V_1 = 50\,\mathrm{m\ell}$. K této směsi přidáme $V_2 = 20\,\mathrm{m\ell}$ roztoku glukózy o koncentraci $c_2 = 6{,}5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{mol}\cdot\ell^{-1}$. Předpokládejme, že všechny přidané molekuly glukózy jsou adsorbovány na povrchu nanočástic a rozloží se na něm rovnoměrně. Jaký bude průměrný počet molekul glukózy na $1\,\mathrm{nm}^2$ povrchu stříbrné nanočástice?*

*Danka se inspirovala svým výzkumem.*

Najprv si spočítame počet strieborných nanočastíc v roztoku $N_1$. Ten získame ako

$$N_1 = c_1V_1N_\mathrm{A}\,,$$

kde $N_\mathrm{A} = 6{,}022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ je Avogadrova konštanta. Potom pomocou rovnakého vzorca spočítame počet molekúl glukózy $N_2$, ktoré do roztoku nanočastíc pridáme

$$N_2 = c_2V_2N_\mathrm{A}\,.$$

Pomer $\frac{N_2}{N_1}$ nám teda udáva počet molekúl, ktoré budú adsorbované na jednej nanočastici. Pre zaujímavosť môžeme spočítať číselnú hodnotu tohto pomeru

$$\frac{N_2}{N_1} \doteq 2\,888\,.$$

Aby sme mohli vypočítať počet molekúl adsorbovaných na jednotku plochy, musíme ešte vypočítať plochu povrchu jednej nanočastice. To urobíme pomocou vzorca pre povrch gule

$$S_1 = 4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2 \,.$$

Nakoniec môžeme spočítať priemerný počet molekúl glukózy adsorbovaný na $1\,\mathrm{nm}^2$ plochy povrchu striebornej nanočastice

$$\sigma = \frac{N_2}{S_1 N_1} = \frac{c_2 V_2}{c_1 V_1 \pi d^2} \doteq 2{,}30\,\mathrm{nm}^{-2} \,.$$

Na $1\,\mathrm{nm}^2$ povrchu striebornej nanočastice bude adsorbovaných priemerne 2,30 molekúl glukózy.

***Daniela Pittnerová***
`daniela@fykos.cz`

## Úloha BB ... závodní

*Jakou dráhu urazí auto při zrychlování z 0 na $100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ při svém maximálním zrychlení? Koeficient tření mezi pneumatikami a vozovkou je 0,9, jiné druhy odporových sil neuvažujte. Předpokládejte, že auto má dost silný motor na to, aby po celou dobu zrychlování udrželo maximální možné zrychlení.* *Martin vzpomínal na začátky na Matfyzu.*

Aby nedošlo k podkluzování kol, nemůže být síla, s níž autu motor dodává zrychlení, větší než třecí síla. Pišme tedy pro maximální zrychlení $a$ z Newtonova 2. zákona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{fmg}{m} = fg \,,$$

kde $f$ je třecí koeficient. Nyní už ze vztahů pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu snadno určíme

$$v = at = fgt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{fg} \,,$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2fg} \doteq 43{,}7\,\mathrm{m} \,.$$

***Vojtěch David***
`vojtech.david@fykos.cz`

## Úloha BC ... aerogel na vodě

*Máme kvádr aerogelu s hustotou $2{,}42\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Položíme ho na vodu za normálních podmínek. Jaká část se z něj ponoří pod hladinu? Pro jednoduchost uvažujte, že voda do aerogelu nenateče, a zanedbejte povrchové napětí vody.* *Karel chtěl něco s aerogelem.*

Předně poznamenejme, že zvolená kombinace zanedbání není úplně fyzikálně správně, protože v tomto případě bude povrchové napětí hrát docela velkou roli. Nicméně by se dalo čekat, že aerogel hladinu sice neprotrhne, ale že poklesne o stejnou výšku, jako zde určíme.

Pro jednoduchost můžeme uvažovat, že jde o kvádr, který je stabilně částečně ponořený, jeho podstava je rovnoběžná s hladinou vody a má plochu $S$. Celkový výsledek úlohy by byl stejný i u obecného tvaru aerogelu, ale takto je to lépe představitelné. Hloubku, do které je aerogel zanořený ve vodě, označme $x$ a výšku kvádru ve směru kolmém na hladinu jako $h$. Hustotu aerogelu budeme značit $\rho_1$.

Vztlaková síla vody, působící na kvádr, je $F_1 = \rho_3 Sxg$, kde $\rho_3 = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody. Rovněž musíme započítat vztlakovou sílu vzduchu, která je $F_2 = \rho_2 S\,(h - x)\,g$, kde $\rho_2 = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu. Celková vztlaková síla působící na aerogel je

$$F = F_1 + F_2 = S\,(\rho_3 x + \rho_2\,(h - x))\,g\,.$$

Tato síla se musí velikostně vyrovnat s celkovou tíhovou silou působící na aerogel, tedy $F_g = mg = \rho_1 Shg$, odkud získáme rovnici pro jednu neznámou $x$, resp. nás bude zajímat $x/h$, na které cílilo zadání úlohy

$$\begin{aligned} F_g = F \qquad \Rightarrow \qquad \rho Shg &= S\,(\rho_3 x + \rho_2\,(h - x))\,g\,,\\ \rho_1 h &= \rho_3 x + \rho_2 h - \rho_2 x\,,\\ \frac{x}{h} &= \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \doteq 0{,}122\,\%\,. \end{aligned}$$

Když takovýto aerogel položíme na povrch vody bez uvážení povrchového napětí, neponoří se ani o 0,13 %. V reálném případě bude tedy aerogel ležet na vodě, hladinu neporuší a pro pozorovatele to bude vypadat, že ji téměř ani neprohýbá.

***Karel Kolář***
`karel@fykos.cz`

## Úloha BD ... měření poloměru Země on budget

*Předpokládejme, že si na okraji pláže někdo lehne tak, že jeho oči jsou přesně na úrovni mořské hladiny a že se dívá na zapadající slunce. Když se mu jeho horní okraj schová za horizont, spustí stopky a postaví se, takže jeho oči jsou najednou ve výši $h = 164\,\mathrm{cm}$ a slunce mu do nich znovu svítí. Když mu horní okraj slunce opět zapadne za horizont, stopky zastaví. Jaký čas budou ukazovat, pokud se to odehrálo na rovníku v den rovnodennosti?*

*Lego vlastně nikdy nebyl u moře.*

V sústave rotujúcej so Zemou, je „horný okraj slnka“ bod, ktorý sa pohybuje po kružnici s veľkým polomerom (vzdialenosť Zeme od Slnka takto jednoduchým experimentom nezistíme) uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} \doteq 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$. Čas na stopkách teda môžeme určiť pomocou uhla, o ktorý sa tento bod za daný časový úsek posunul.

Keď horný okraj slnka zapadne za horizont, znamená to, že práve vtedy je spojnica tohto bodu s očami pozorovateľa dotyčnicou k zemskému povrchu. Budeme uvažovať dve takéto dotyčnice. Prvá z nich má bod dotyku presne v bode, kde sa nachádza pozorovateľ. Druhá dotyčnica bude mať bod dotyku niekde inde. Uhol, o ktorý sa slnko posunulo je presne uhol zovretý uvažovanými dotyčnicami. Nakoľko sú ale dotyčnice vždy kolmé k polomeru v danom bode, hľadaný uhol je zároveň uhlom zovretým medzi spojnicami stredu Zeme a týchto bodov dotyku. Na vypočítanie tohto uhla využijeme trojuholník s vrcholmi v strede Zeme, druhom bode dotyku a očami pozorovateľa (keď stojí). Uhol v druhom bode dotyku je zrejme pravý (jedna strana trojuholníka, ktorá z neho vychádza, je časť dotyčnice v tomto bode a druhá je polomer Zeme v tomto bode).

Máme teda pravouhlý trojuholník a potrebujeme zistiť veľkosť jedného z jeho ostatných vnútorných uhlov. Keďže poznáme dĺžky strán, ktoré obklopujú hľadaný uhol, zíde sa na to niektorá z goniometrických funkcií. Strana medzi stredom Zeme a bodom dotyku (priľahlá odvesna) je rovná polomeru Zeme $R$, strana medzi stredom Zeme a očami pozorovateľa (prepona) je dlhá $R+h$. Kosínus uhla medzi týmito stranami je rovný pomeru ich dĺžok, čo znamená, že potrebný uhol dostaneme použitím funckie arkuskosínus

$$\varphi = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right) \doteq 7{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}\,.$$

Výsledný čas na stopkách dostaneme ako $t = \frac{\varphi}{\omega} \doteq 9{,}9\,\mathrm{s}$.

***Šimon Pajger***
`legolas@fykos.cz`

## Úloha BE ... z extrému do extrému

*Jakou délku $l$ by měla válcová tyč s poloměrem rovným Planckově délce $l_\mathrm{p}$ a objemem pozorovatelného vesmíru? Uvažujeme stáří vesmíru $t = 13{,}8 \cdot 10^9\,\mathrm{let}$ a předpokládáme, že vesmír je plochý. Planckova délka se dá vyjádřit pouze pomocí tří základních fyzikálních konstant – gravitační konstanty $G$, redukované Planckovy konstanty $\hbar$ a rychlosti světla $c$. Jako odpověď uveďte $\log_{10}\left(\frac{l}{1\,\mathrm{m}}\right)$.* *Roba zajímalo, co kdyby...*

Najskôr si vypočítame hodnotu Planckovej dĺžky. Zo zadania vidíme, že použijeme rozmerovú analýzu na určenie koeficientov $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ z rovnice $l_\mathrm{p} = G^\alpha \hbar^\beta c^\gamma$, pričom všetky fyzikálne veličiny z tejto rovnice majú zápis v jednotkách SI

$$[G] = \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}\,, \qquad [c] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$
$$[\hbar] = \mathrm{J{\cdot}s} = \mathrm{m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}}\,, \quad [l_\mathrm{p}] = \mathrm{m}\,.$$

Keď tieto vyjadrenia dosadíme do rovnice pre $l_\mathrm{p}$ tak máme vzťah

$$\mathrm{m}^1 = \mathrm{m}^{3\alpha} \cdot \mathrm{kg}^{-\alpha} \cdot \mathrm{s}^{-2\alpha} \cdot \mathrm{m}^{2\beta} \cdot \mathrm{kg}^{\beta} \mathrm{s}^{-\beta} \cdot \mathrm{m}^{\gamma} \cdot \mathrm{s}^{-\gamma}\,.$$

Porovnaním základov mocnín na pravej a ľavej strane rovnice dostávame tri rovnice o troch neznámych

$$\begin{aligned} 1 &= 3\alpha + 2\beta + \gamma\,,\\ 0 &= -\alpha + \beta\,,\\ 0 &= -2\alpha - \beta - \gamma\,. \end{aligned}$$

Z druhej rovnice máme, že platí $\beta = \alpha$, z tretej rovnice máme $\gamma = -3\alpha$ a dosadením do prvej rovnice dostávame, že $\alpha = \frac{1}{2}$, ďalej $\beta = \frac{1}{2}$ a následne $\gamma = -\frac{3}{2}$. Vyjadrenie Planckovej dĺžky splňuje rovnica

$$l_\mathrm{p} = G^{\frac{1}{2}} \cdot \hbar^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1{,}616 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{m}\,.$$

Polomer pozorovateľného vesmíru je rovný $R = tc$ a číselne v metroch

$$R \doteq 1{,}305\,6 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m}\,.$$

Z rovnosti objemov dostaneme

$$S \cdot l = \frac{4}{3}\pi R^3 \,,$$

pričom $S = \pi l_\mathrm{p}^2$. Dĺžku teda finálne vyjadríme ako

$$l = \frac{4R^3}{3l_\mathrm{p}^2} = \frac{4 \cdot 2{,}23 \cdot 10^{78}\,\mathrm{m}^3}{3 \cdot 2{,}61 \cdot 10^{-70}\,\mathrm{m}^2} \doteq 1{,}1 \cdot 10^{148}\,\mathrm{m}\,.$$

Správna odpoveď teda je 148.

***Robert Jurenka***
`robert.jurenka@fykos.cz`

## Úloha BF ... malé bourací kladivo

*Nacházíme se na Jupiteru s povrchovým gravitačním zrychlením $a = 24{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a máme dvě identická kyvadla, která jsou schopná kmitat v jedné rovině a mají společný bod závěsu. Délka tuhého nehmotného lanka je $l = 5\,\mathrm{m}$ a kulička z osmia na jeho konci má průměr $d = 5\,\mathrm{cm}$. Každé kyvadlo nejprve vychýlíme o úhel $\theta = 4^\circ$ vůči rovnovážné poloze a následně je obě současně pustíme proti sobě.*

*Nyní uvažujme pouze jedno z kyvadel. Jakou rychlostí musí kulička kyvadla narazit do pevné svislé stěny (kolmé na rovinu kmitání, procházející bodem upevnění kyvadla a jeho rovnovážnou polohou), aby na ni při nárazu působila stejná síla jako při výše zmíněné srážce dvou kyvadel? Všechny srážky uvažujme jako dokonale pružné.*

*Delion přemýšlel nad dopravními nehodami.*

Pri riešení budeme vychádzať zo zákona zachovania celkovej energie, najprv budeme riešiť prípad zrážky dvoch kyvadiel. Tesne pred zrážkou majú kyvadlá maximálnu rýchlosť $v_\mathrm{max}$, ktorú získajú premenením polohovej energie $E_\mathrm{p}$ na kinetickú $E_\mathrm{k}$. Polohová energia $E_\mathrm{p}$ jedného kyvadla je

$$E_\mathrm{p} = mah\,,$$

kde $m$ je hmotnosť guľôčky a $h$ je výška počiatočnej výchylky vzhľadom na rovnovážnu polohu kyvadla. Vzhľadom na veľkosť guľôčky k charakteristickým rozmerom úlohy ju môžeme považovať za hmotný bod umiestnený v jej strede. Výška počiatočnej výchylky $h$ teda bude

$$h = \left(l + \frac{d}{2}\right)(1 - \cos\theta)\,.$$

Kinetická energia $E_\mathrm{k}$ guľôčky je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

Dosadením $h$ do polohovej energie a položením rovnosti pre polohovú energiu a kinetickú energiu dostávame

$$ma\left(l + \frac{d}{2}\right)(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2\,,$$

vyjadrením $v_\mathrm{max}$ dostaneme vzťah pre rýchlosť gulôčky tesne pred nárazom

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{2a\left(l + \frac{d}{2}\right)(1 - \cos\theta)}\,.$$

Pri narazení gulôčky do steny je prípad vďaka rovinnej symetrii rovnaký ako v prípade zrážky dvoch kyvadiel. Dosadením číselných hodnôt do posledného vzťahu dostávame $v_{\mathrm{max}} \doteq \doteq 0{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Moment zotrvačnosti guľôčky na konci vlákna sme vzhľadom k jej rozmerom zanedbali.

***Daniel Broško***
`daniel.brosko@fykos.cz`

## Úloha BG ... hustota provozu na dálnici

*Dano jede po dálnici a vidí, že míjí kamiony v protisměru častěji než předjíždí ty v jeho směru. Říká si, jestli je to správně a jestli není v protisměru jen větší provoz. Jaký by měl být poměr počtu kamionů, které míjí v protisměru, vůči těm, které předjíždí, pokud by v obou směrech jezdil stejný počet za jednotku času? Pro jednoduchost uvažujte, že Dano jede autem rychlostí $v_1 = 130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a všechny kamiony jezdí rychlostí $v_2 = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Rozměry aut, kamionů a dálnice můžete zanedbat.* *Karel jel několik hodin po dálnici a přemýšlel o tom.*

Dano míjí kamiony v protisměru rychlostí $w_1 = v_1 + v_2$, protože rychlosti protijedoucích vozidel se sčítají. Naopak, kamiony předjíždí rychlostí $w_2 = v_1 - v_2$. Pokud sledujeme dlouhou dobu, tedy mnoho kamionů, respektive pokud ani nemáme zadané nějaké rozestupy, pak je zřejmé, že musíme vyjít přímo z těchto rychlostí. Čím rychleji se pohybují kamiony vůči autu s Danem, tím více jich potká za jistou časovou jednotku. Hledaný poměr $K$ je přímo úměrný poměru rychlostí, kterými kamiony potkává. Můžeme tedy psát

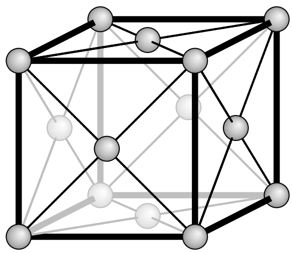
$$K = \frac{w_1}{w_2} = \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2} = \frac{220}{40} = 5{,}5\,,$$

Pokud by byl provoz kamionů v obou směrech stejný, pak by měl Dano vidět protijedoucí kamiony 5,5 krát častěji než ty, které bude předjíždět. Pokud jich ale uvidí např. pouze čtyřnásoný počet, dá se usuzovat, že provoz v protějším směru je nižší, i když protijedoucích kamionů vídá více.

***Karel Kolář***
`karel@fykos.cz`

## Úloha BH ... hustá mřížka

*Jedno z možných uspořádání atomů v krystalu je plošně centrovaná kubická mřížka. V takovém případě jsou atomy umístěny ve vrcholech a ve středech stěn dané krychle. Krystal je tvořen periodickým uspořádáním těchto krychlí. Atomy považujeme za tuhé koule, které se těsně dotýkají. Jaká část objemu krystalu bude vyplněná atomy?* *Danka se učila krystalografii.*



Označme si dĺžku hrany elementárnej bunky ako $a$. Prvá dôležitá vec pri tomto výpočte je uvedomiť si, aký je maximálny možný polomer $r$ atómu v mriežke. Pozrime sa na to, ako sú atómy usporiadané v stene kocky. V každom z vrcholov sa nachádza 1 atóm a ďalší atóm leží v strede steny. Keďže sa atómy tesne dotýkajú, dĺžka stenovej uhlopriečky je rovná štvornásobku polomeru atómu (2 polomery zo stredového atómu a 1 polomer od každého z dvoch atómov v protiľahlých vrcholoch). Dĺžku stenovej uhlopriečky spočítame z dĺžky strán tejto steny, to znamená ako preponu pravouhlého trojuholníka s odvesnami o dĺžke $a$. Výpočtom zistíme, že stenová uhlopriečka má dĺžku $\sqrt{2}a$. Potom platí

$$\sqrt{2}a = 4r\,,$$

odkiaľ dostaneme

$$r = \frac{a}{2\sqrt{2}}\,.$$

Druhá zásadná vec, ktorú si musíme uvedomiť, je aký objem zaberajú atómy spadajúce do jednej elementárnej bunky. Každý atóm vo vrchole tejto pomyselnej kocky v kryštáli vlastne patrí do ôsmich susediacich kociek. Teda iba $\frac{1}{8}$ vrcholového atómu patrí do našej elementárnej bunky. Keďže kocka má 8 vrcholov, tak celkový objem vrcholových atómov zodpovedá $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$ celému atómu. Podobne je to v prípade stenových atómov. Každý atóm v strede steny prislúcha dvom elementárnym bunkám, teda na jednu kocku pripadá iba $\frac{1}{2}$ každého stenového atómu. Kocka má 6 stien, takže celkový objem stenových atómov v jednej elementárnej bunke je potom rovný $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ celým atómom. V jednej elementárnej bunke je teda zaplnený priestor o objeme štyroch celých atómov. Napokon spočítajme pomer $p$ celkového objemu atómov v elementárnej bunke k objemu samotnej bunky (kocky)

$$p = \frac{4\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}\,.$$

Vyjadríme $r$ pomocou $a$ a po vykrátení dostaneme

$$p = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \doteq 74\%\,.$$

Koeficient zaplnenia plošnej centrovanej kubickej (FCC) mriežky je teda 74 %.

***Daniela Pittnerová***
daniela@fykos.cz

## Úloha CA ... arachnofobie

*Jarda ze své postele pozoruje pavouka, jak nad ním visí na svém vlákně, a říká si, že je dobře, že pavouci nejsou větší. Pak jej ale napadlo, že by pavouk možná moc větší být nemohl. Jestliže pavoučí vlákno udrží $k$-násobek pavoukovy hmotnosti, maximálně kolikrát by se pavouk a vlákno mohli při zachování svých proporcí zvětšit, aby se vlákno nepřetrhlo?*

*Jarda se koukal na hororový film.*

Informace o tom, co udrží pavoučí vlákno, nám říká, jaké maximální mechanické pnutí vlákno vydrží. To závisí na síle působící na vlákno a na obsahu jeho průřezu. Hmotnost pavouka se při $c$-násobném zvětšení zvětší $c^3$-krát, zatímco průřez vlákna jen $c^2$-krát, síla se tedy zvětší úměrně. Mez pevnosti vlákna je $kmg$, takže z nutné podmínky pro nepřetržení vlákna

$$c^3 mg \leq c^2 kmg\,,$$

vidíme, že $c_{\max} = k$.

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha CB ... osmičas rozpadu

*Za jakou dobu se rozpadne jedna osmina radioaktivních částic, víme-li, že polovina částic se rozpadne za čas $T$? Karel chtěl nachytat naivní řešitele.*

Víme, že rozpadový zákon lze popsat vztahem

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} ,$$

kde $N(t)$ je počet nerozpadlých částic v čase $t$ a $N_0$ je jejich původní celkový počet. Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} ,$$

kde máme vyjádřený poměr aktuálního počtu částic k původnímu. Teď si zbývá uvědomit, že hledáme čas, kdy nám zbývá $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87{,}5\,\%$ částic, tedy

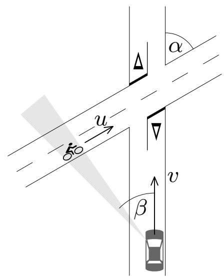
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{T} \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{7}{8}}{\ln\frac{1}{2}} T \doteq 0{,}193T .$$

Jedna osmina atomů se rozpadne za 0,193 násobek poločasu rozpadu. Tedy o něco rychleji, než by mohl být „rychlý neuvážený odhad,“ že půjde o čtvrtinu poločasu rozpadu. Ze začátku máme totiž nejvíce nepřeměněných částic a čím více částic máme, tím častěji dojde k přeměně.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha CC ... pozor, cyklista

*Auto se po rovné silnici blíží ke křižovatce rychlostí $v = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Na ní by mělo dát přednost vozidlům jedoucím po druhé rovné silnici, která tu první přetíná zleva pod úhlem $\alpha = 60^\circ$. Řidiči překáží ve výhledu levý sloupek přední karoserie, který blokuje pohled pod úhlem $\beta = 25^\circ$ od směru jízdy. Jakou rychlostí $u$ se musí do křižovatky blížit cyklista, aby se mohl srazit s autem, aniž by ho řidič viděl? Dodo moc nejezdí na kole.*




Ak sa majú cyklista a auto zraziť v križovatke, v každom čase musí byť od križovatky auto vzdialené $vt$ a cyklista $ut$, kde $t$ je čas zostávajúci do zrážky. Aby vodič cyklistu nevidel, musia pozície cyklistu C, auta A a križovatky K tvoriť trojuholník s uhlami $\beta$ oproti strane CK, $\alpha$ oproti strane AC a $\gamma = \pi - \alpha - \beta = 95^\circ$ oproti strane AK. Zo znalosti uhlov a dĺžky strany AK môžeme pomocou sínusovej vety vyjadriť stranu KC ako

$$|KC| = |AK| \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} ,$$

z čoho pre rýchlosť cyklistu platí

$$u = v\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = v\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \doteq 21\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} .$$

***Jozef Lipták***
liptak.j@fykos.cz

## Úloha CD ... zanedbáme Saturn

*Organizátoři FYKOSu plánují laserem vypařit Saturn a následně jeho prstence homogenizovat do obruče s poloměrem $r$ a délkovou hustotou $\tau$. Jaká gravitační síla by na nás působila ve středu obruče? Uvažujte, že organizátoři byli pečliví a odlaserovali i Saturnovy měsíce. Vlivy okolních planet zanedbejte. Motivy organizátorů nezpochybňujte.* *Pepa chce být vyhozen z FYKOSu.*

Pro začátek uveďme, že se dá intuitivně očekávat, že hledaná síla bude nulová – gravitační účinky způsobené protilehlými elementy obruče se totiž navzájem vyruší. Že je toto pozorování správné, si můžeme ověřit následujícím výpočtem.

Představme si situaci v rovině obruče. Zavedeme si polární souřadnice s počátkem v jejím středu. Polohu libovolného nekonečně malého úseku obruče o délce $\mathrm{d}l$ lze pak popsat vzdáleností od středu $r$ a úhlem $\varphi$. Jeho polohu můžeme vyjádřit pomocí polohového vektoru

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ .$$

Hmotnost dílku určíme pomocí délkové hustoty jako $\mathrm{d}m = \tau\,\mathrm{d}l$, což můžeme zapsat také jako $\mathrm{d}m = \tau r\,\mathrm{d}\varphi$. Nekonečně malý „kousek“ přispívá k celkové síle působící na hmotný bod o hmotnosti $M$ v jejím středu dílkem $\mathrm{d}\mathbf{F}$. Ten si můžeme vyjádřit pomocí Newtonova gravitačního zákona jako

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = G\frac{M\,\mathrm{d}m}{r^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{r}.$$

Výslednou sílu získáme sečtením jednotlivých příspěvků od všech „dílků“ obruče. Nesmíme však zapomenout, že sčítáme vektorově, integrál si proto rozdělíme na dvě složky

$$\int_{\text{obruč}} \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{x}} = \frac{GM\tau}{r^2}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,,$$
$$\int_{\text{obruč}} \mathrm{d}\mathbf{F}_{\mathrm{y}} = \frac{GM\tau}{r^2}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Příspěvky od jednotlivých „dílků“ obruče se tedy vskutku vyruší, takže výsledná síla působící ve středu obruče je nulová.

***Josef Trojan***
`josef.trojan@fykos.cz`

## Úloha CE ... ohřev syntetického vzduchu

*Mějme dokonale izolovanou vakuovou celu o rozměrech $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = c = 4\,\mathrm{cm}$. Do ní napustíme dusík a kyslík o teplotě $20\,\mathrm{^\circ C}$ v molárním poměru 85 ke 15 tak, aby tlak v cele byl $100\,\mathrm{mbar}$, a následně ji začneme ohřívat. Teplota směsi plynů v ní bude růst rychlostí $0{,}8\,\mathrm{^\circ C\cdot s^{-1}}$. Jaký je příkon přivedený do cely, je-li účinnost ohřívání plynu $68\,\%$? Měrná tepelná kapacita při stálém objemu je $c_{\mathrm{N_2}} = 743\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ pro dusík a $c_{\mathrm{O_2}} = 658\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ pro kyslík. Molární hmotnost dusíku je rovna $M_{\mathrm{N_2}} = 28\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ a pro kyslík $M_{\mathrm{O_2}} = 32\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.*
*Danka se učila o operando metodách.*

Pre teplo $Q$ prijaté telesom môžeme napísať kalorimetrickú rovnicu v tvare

$$Q = mc\Delta T\,,$$

kde $m$ je hmotnosť telesa, $c$ je jeho merná tepelná kapacita a $\Delta T$ je zmena teploty telesa v dôsledku prijatia tepla. Podobne môžeme napísať aj rovnicu pre danú zmes plynov

$$đQ = \left(m_{\mathrm{N}_2} c_{\mathrm{N}_2} + m_{\mathrm{O}_2} c_{\mathrm{O}_2}\right) \mathrm{d}T \,,$$

kde $đQ$ je infinitezimálne množstvo tepla dodané zmesi a $\mathrm{d}T$ infinitezimálne zvýšenie teploty plynov. Teplo dodané zmesi súvisí s príkonom $P$ privedeným do cely ako $đQ = \eta P \,\mathrm{d}t$, kde $\eta$ je účinnosť ohrievania plynu.

Hmotnosť plynov v cele zistíme pomocou stavovej rovnice ideálneho plynu

$$pV = nRT \,,$$

kde $p$ je tlak plynu, $V$ jeho objem, $n$ látkové množstvo, $R$ molárna plynová konštanta a $T$ teplota plynu. Vyjadríme si látkové množstvo

$$n = \frac{p_0 V}{R T_0} \,,$$

ktoré je počas celého procesu konštantné, a preto môžeme pri jeho výpočte vychádzať z počiatočných hodnôt veličín. Táto rovnica platí pre každý plyn osobitne. Objem oboch plynov je rovný objemu cely, teda $V = abc$. Parciálne tlaky dusíka a kyslíka vieme spočítať z celkového tlaku, pretože podľa Daltonovho zákona parciálnych tlakov je celkový tlak zmesi plynov rovný súčtu parciálnych tlakov jednotlivých zložiek. Zároveň pomer parciálnych tlakov jednotlivých plynov je rovný ich molárnemu pomeru. Z toho vyplýva, že počiatočný parciálny tlak dusíka v cele je $p_{\mathrm{N}_2} = 85\,\mathrm{mbar}$ a kyslíka $p_{\mathrm{O}_2} = 15\,\mathrm{mbar}$. Látkové množstvo môžeme jednoducho prepočítať na hmotnosť plynu pomocou vzťahu

$$m = nM \,,$$

kde $M$ je molárna hmotnosť plynu. Ak skombinujeme vzťahy pre hmotnosť, látkové množstvo, príkon a kalorimetrickú rovnicu, pre zmes plynov dostaneme

$$\eta P \,\mathrm{d}t = \frac{V}{R T_0} \left(p_{\mathrm{N}_2} M_{\mathrm{N}_2} c_{\mathrm{N}_2} + p_{\mathrm{O}_2} M_{\mathrm{O}_2} c_{\mathrm{O}_2}\right) \mathrm{d}T \,,$$

$$P = \frac{abc}{R T_0 \eta} \left(p_{\mathrm{N}_2} M_{\mathrm{N}_2} c_{\mathrm{N}_2} + p_{\mathrm{O}_2} M_{\mathrm{O}_2} c_{\mathrm{O}_2}\right) \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \,.$$

Výraz $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ je rýchlosť zmeny teploty zmesi, ktorej hodnotu vieme zo zadania. Zostáva nám dosadiť číselné hodnoty do vzorca a dostávame $P = 8{,}05 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}$. Do cely je teda privedený príkon $P = 8{,}05\,\mathrm{mW}$.

K podobnému výsledku sa vieme dopracovať aj teoretickou cestou – z modelu ideálneho plynu. Nakoľko nie je na systém konaná žiadna práca (teda nemení sa jeho objem a nedochádza ani k chemickej reakcii), 1. termodynamický zákon nadobúda tvar

$$\mathrm{d}U = đQ \,,$$

kde $U$ je vnútorná energia, ktorá má v prípade dvojatómového plynu tvar $U = \frac{5}{2} nRT$. Preto môžeme vyššie uvedený vzťah $\eta P \,\mathrm{d}t = đQ$ upraviť ako

$$\eta P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{2} nR \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{2} \frac{p_0 V}{T_0} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \,.$$

Takýmto postupom obdržíme hodnotu $P = 8{,}03\,\mathrm{mW}$. Odlišný výsledok je tak zapríčinený rozdielom medzi teoreticky a experimentálne určenou hodnotou mernej tepelnej kapacity. Jej hodnotu v našom mikroskopickom modeli plynu vieme určiť porovnaním

$$mc\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{2}nR\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,,$$

z čoho plynie

$$c = \frac{5}{2}\frac{nR}{m} = \frac{5}{2}\frac{R}{M}\,.$$

Oproti zadaným hodnotám tak obdržíme $c_{\mathrm{N}_2} = 742\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ pre dusík a $c_{\mathrm{O}_2} = 650\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ pre kyslík.

***Daniela Pittnerová***
daniela@fykos.cz

## Úloha CF ... kulička skáče z okna

*Kulička o hmotnosti $1{,}2\,\mathrm{kg}$ se připoutala k pružnému lanu o tuhosti $6\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a klidové délce $l_0 = 8\,\mathrm{m}$. Lano je druhým koncem připojeno k podložce, ze které kulička vyskočí dolů. Lano se při pádu kuličky odmotává a začne se natahovat, právě když je kulička o $l_0$ níže než původně. Kuličce by se nechtělo udělat nevolno, tak by ji zajímalo, s jakým největším zrychlením se bude během své cesty pohybovat? Výsledek udejte jako násobek $g$.*

*Tohle Jarda na kolejích zkoušet nebude.*

Při pádu dolů, než se celé lano odmotá a narovná, se kulička pohybuje se zrychlením $g$. Jakmile se lano natáhne, začne se pohybovat jako na harmonickém oscilátoru. Pro harmonický oscilátor je zrychlení největší v amplitudě výchylky. V tomto bodě je rychlost nulová, takže maximální prodloužení lana najdeme pomocí zákona zachování energie ve tvaru

$$mg\left(l_0 + y\right) = \frac{1}{2}ky^2\,,$$

kde $m$ a $k$ jsou hmotnost kuličky a tuhost lana. Levá strana představuje úbytek potenciální energie, pravá strana je přírustek energie pružnosti a $y$ značí maximální prodloužení. Z této kvadratické rovnice vyjádříme $y$ jako

$$y = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mgl_0k}}{k}\,,$$

přičemž hledáme kladný kořen. Velikost celkové síly působící na kuličku v nejspodnějším bodě tak je

$$F = ky - mg = \sqrt{m^2g^2 + 2mgl_0k}$$

a zrychlení je

$$a = \frac{F}{m} = \sqrt{g^2 + \frac{2gl_0k}{m}}\,.$$

Přetížení získáme jako podíl výsledného zrychlení a tíhového zrychlení, tudíž

$$\frac{a}{g} = \sqrt{1 + \frac{2l_0k}{mg}} \doteq 3{,}0\,.$$

Maximální přetížení kuličky bude 3-násobek tíhového zrychlení.

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha CG ... přisávající se termoska

*Legolas si všiml, že když do termosky při vyplachování napustí studenou vodu, přikryje otvor rukou a zatřese, vznikne vevnitř podtlak, který je někdy tak velký, že mu na ruce termoska zůstane viset. Předpokládá, že tomu tak je, protože vzduch v termosce byl původně teplý od čaje, který tam měl předtím, a studená voda jej pak rychle ochladila. Řekl si tedy, že musí na toto téma vymyslet úlohu.*

*Předpokládejme, že objem vzduchu v termosce je* $V = 500\,\mathrm{m}\ell$, *otvor na jejím vrchu má průřez* $S = 13\,\mathrm{cm}^2$, *hmotnost vody a termosky je dohromady* $m = 0{,}35\,\mathrm{kg}$ *a teplota vzduchu se při vypláchnutí ustálí na* $T_\mathrm{c} = 20\,^\circ\mathrm{C}$. *Jaká (minimálně) musela být původní teplota vzduchu, aby vzniklý podtlak udržel termosku na Legově ruce?* *True story.*

Pred zakrytím otvoru sa v termoske nachádzal vzuch o teplote $T_\mathrm{h}$ a atmosférickom tlaku $p_\mathrm{h} = p_\mathrm{a}$. Celý proces je izochorický – objem systému sa nemení,a preto po ochladení vzduchu na teplotu $T_\mathrm{c} = 293{,}15\,\mathrm{K}$ bude rovnovážny tlak $p_\mathrm{c} = p_h T_\mathrm{c}/T_\mathrm{h}$. Veľkosť sily, ktorá tlačí termosku oproti ruke, odpovedá súčinu prierezu otvoru a rozdielu tlakov

$$F = S\Delta p = Sp_\mathrm{c}\left(1 - \frac{T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}}\right) = Sp_\mathrm{c}\frac{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}}\,.$$

Proti tejto sile pôsobí sila tiažová, a preto z ich rovnováhy dostávame podmienku pre minimálnu počiatočnú teplotu ako

$$mg = Sp_\mathrm{c}\frac{T_\mathrm{h} - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{h}} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{h} = T_\mathrm{c}\frac{Sp_\mathrm{c}}{Sp_\mathrm{c} - mg} \doteq 301\,\mathrm{K} = 28\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

To je relatívne nízka teplota na to, že vzduch ju získal výmenou s čajom. Vzhľadom na vypočítanú teplotu by sa termoska mohla Legolasovi na ruku prisávať bežne, čo sa však podľa neho nedeje. Bude to pravdepodobne spôsobené zanedbaniami, ktoré sme počas výpočtu urobili – v realite sa vzduch začne ochladzovať už pri napúšťaní vody.

Taktiež Legolasova ruka netesní dokonale, a časť vzduchu teda vojde do termosky aj po jej „utesnení“. Ďalší z faktorov je, že Legolas nemá dokonale tuhú ruku a jej pritlačením dovnútra sa zmenší objem, zvýši tlak a tým pádom zmenší podtlak.

Experimentálne založeným riešiteľom na záver Legolas odkazuje, že za termosky rozbité v dôsledku tejto úlohy nepreberá zodpovednosť!

***Šimon Pajger***
legolas@fykos.cz

## Úloha CH ... Robo kop!

*Robo se nachází ve vzdálenosti $L = 2\,022\,\mathrm{cm}$ od fotbalové branky a kope na ni míč o počáteční rychlosti $v_0 = 15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 45^\circ$. Tímto způsobem Robo trefil břevno a k jeho překvapení se míč odrazil přesně směrem vzhůru. Jaká je maximální výška nad zemí, které míč po odrazu od břevna dosáhne, ztratil-li při odrazu 10 % své rychlosti?*

*Robo rád trefuje konstrukci fotbalové branky.*

Používame pohybové rovnice šikmého vrhu nahor

$$x(t) = v_0 t\cos\alpha\,,\qquad v_x(t) = v_0\cos\alpha\,,$$
$$y(t) = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,\quad v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt\,,$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,.$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ sú okamžité súradnice lopty v čase $t$, $v_x(t)$ a $v_y(t)$ sú zložky rýchlosti $v$. V horizontálnej vzdialenosti $x(t) = L$ sa lopta bude nachádzať v čase $t_1 = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$ a jej výška nad zemou bude rovnaká ako výška bránky $y(t_1) = h_0$. Výšku bránky si vieme vypočítať dosadením času $t_1$ do druhej pohybovej rovnice šikmého vrhu a dostávame hodnotu

$$h_0 = v_0\frac{L}{v_0\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,.$$

Teraz sa pozrime na rýchlosť, ktorú bude mať lopta po odraze. Označme si faktor rýchlosti, ktorá zostane zachovaná, ako $\gamma = 0{,}9$. Následne teda platí

$$v_2 = \gamma v_1 = \gamma\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \left(v_0\sin\alpha - \frac{gL}{v_0\cos\alpha}\right)^2} = \gamma\sqrt{v_0^2 - 2g\left(L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)}\,,$$

kde $v_1$ je rýchlosť lopty pred odrazom a $v_2$ je rýchlosť lopty po odraze. Ďalej náš problém vieme riešiť pomocou zákona zachovania energie. Jednu situáciu berieme infinitezimálne krátko po odraze lopty od brvna, a druhú v najvyššom bode, ktorý lopta dosiahne a jej rýchlosť je vtedy nulová. Zapíšeme to pomocou rovníc ako

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_0 = mgh_{\max} \quad\Rightarrow\quad h_{\max} = h_0 + \frac{v_2^2}{2g}\,.$$

Dosadením za $h_0$ a $v_1$ z rovníc vyššie, a vhodnými úpravami dostaneme

$$h_{\max} = L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \frac{\gamma^2}{2g}\left(v_0^2 - 2g\left(L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)\right)\,,$$
$$h_{\max} = \left(1-\gamma^2\right)\left(L\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) + \gamma^2\frac{v_0^2}{2g} \doteq 9{,}74\,\mathrm{m}\,.$$

***Robert Jurenka***
`robert.jurenka@fykos.cz`

## Úloha DA ... waterboarding železné koule

*Legolas vzal své akvárium, naplnil ho vodou (ale ne úplně po okraj, aby ho zbytečně nepřelil) a položil ho na váhu. Neměl ale rybky, tak si řekl, že tam nechá plavat svou oblíbenou železnou kouli. Ta by sama o sobě samozřejmě hned klesla na dno, proto ji zavěsil na siloměr.*

*Když koule plavala pod vodou (nedotýkala se dna ani neplovala na hladině), siloměr ukazoval hodnotu $\Delta F = 10\,\mathrm{N}$. Přitom si však Lego všiml, že váha najednou ukazuje více než před ponořením železné koule.*

*O jakou hodnotu se číslo na váze zvýšilo po jejím ponoření? Hustota železa je $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7\,874\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Přesné rozměry své železné koule Lego nezná. Zbývá dodat, že z akvária nevytekla žádná voda a váha ukazuje v kilogramech.* *Legolas si půjčil...*

Prvým a najdôležitejším uvedomením si v tejto úlohe je, že 3. Newtonov zákon platí vždy. Ak teda voda nadľahčuje železnú guľu istou vztlakovou silou, táto guľa tlačí na vodu tak, že výsledná sila má rovnakú veľkosť ako táto vztlaková sila a tlačí smerom dole. Rozdiel v hodnotách, ktoré váha zobrazuje teda zodpovedá vztlakovej sile pôsobiacej na železnú guľu.

Nakoľko rozdiel v silách váha prepočítava na hmotnosť, môžeme povedať, že hodnota na váhe narastie o hmotnosť vytlačenej vody. Jediné, čo potrebujeme spočítať je objem železnej gule. Vieme, že keď je celá ponorená, silomer musí vyrovnávať rozdiel medzi tiažovou a vztlakovou silou pôsobením sily veľkosti $\Delta F$. To nám poskytuje rovnosť

$$\Delta F = F_g - F_{\mathrm{vz}} = V\rho_{\mathrm{Fe}}g - V\rho_{\mathrm{voda}}g \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\Delta F}{g\left(\rho_{\mathrm{Fe}} - \rho_{\mathrm{voda}}\right)}\,.$$

Aby sme získali hmotnosť vytlačenej vody, o ktorú bude váha ukazovať viac, stačí, keď tento objem vynásobíme hustotou vody

$$\Delta m = \frac{\rho_{\mathrm{voda}}}{\rho_{\mathrm{Fe}} - \rho_{\mathrm{voda}}}\frac{\Delta F}{g} \doteq 0{,}15\,\mathrm{kg}\,.$$

Ak teda váha ukazuje v kilogramoch, hodnota na nej sa zvýšila o 0,15.

***Šimon Pajger***
`legolas@fykos.cz`

## Úloha DB ... odporný volant

*Na vodivé kružnici, která je vyrobena z materiálu s délkovým měrným odporem $\lambda$, vybereme dva libovolné body. Jaký středový úhel musí mezi těmito body být, aby odpor mezi nimi byl poloviční ve srovnání s maximálním možným, který lze při jiné volbě bodů naměřit? Jako odpověď uveďte hodnotu menší než $\pi$.* *Jardu napadají úlohy za volantem.*

Na kružnici zvolíme jeden bod a hledáme druhý, který je od prvního vzdálen o úhel $\varphi$ (resp. $2\pi-\varphi$). Odpor mezi těmito body odpovídá paralelnímu zapojení dvou rezistorů o odporech $\varphi\lambda r$ a $(2\pi - \varphi)\,\lambda r$, kde $r$ je poloměr kružnice. Celkový odpor je tedy

$$R(\varphi) = \frac{(2\pi - \varphi)\,\varphi\lambda^2 r^2}{2\pi\lambda r} = \frac{(2\pi - \varphi)\,\varphi\lambda r}{2\pi}\,.$$

Jmenovatel na $\varphi$ nezávisí, pro zjištění maximálního odporu proto stačí derivovat čitatele

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,(2\pi - \varphi)\,\varphi = 2\pi - 2\varphi\,.$$

Položíme tuto rovnici rovnu nule a zjistíme, že úhel, pro který je odpor maximální (kvůli záporné druhé derivaci), je $\varphi_{\max} = \pi$. Vzhledem k symetrii problému toto zjištění není vůbec překvapivé. Maximální odpor tak může být

$$R_{\max} = \frac{(2\pi - \pi)\,\pi\lambda r}{2\pi} = \frac{\pi\lambda r}{2}\,.$$

Chceme nalézt úhel $\varphi$, pro který $R(\varphi) = \frac{R_{\max}}{2}$. Tedy řešíme rovnici

$$\frac{\pi\lambda r}{4} = \frac{(2\pi - \varphi)\,\varphi\lambda r}{2\pi}\,.$$

Upravíme ji na tvar

$$2\varphi^2 - 4\pi\varphi + \pi^2 = 0\,.$$

Jejím řešením je

$$\varphi_{1,2} = \frac{4\pi \pm \sqrt{16\pi^2 - 8\pi^2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\pi\,.$$

Obě řešení jsou správná, protože jejich součet je $2\pi$. V zadání se ale ptáme na menší z obou úhlů, hledanou odpovědí je tudíž $\frac{2-\sqrt{2}}{2}\pi = 0{,}92\,\mathrm{rad}$.

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha DC ... proud metra

*Souprava metra typu M1 je $D = 96{,}66\,\mathrm{m}$ dlouhá, $w = 2{,}72\,\mathrm{m}$ široká a její hmotnost je $M = 133\,\mathrm{tun}$. Kapacita činí $N = 1\,464$ cestujících, maximální rychlost je $v_{\max} = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a zrychlení $a = 1{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pokud bychom uvažovali, že se celou dobu, od nulové po maximální rychlost, rozjíždí s konstantním zrychlením, jaký maximální proud by potřebovala souprava odebírat z kolejnice?*

*Uvažujte plně naplněnou soupravu s lidmi o průměrné hmotnosti $m = 85\,\mathrm{kg}$ včetně oblečení a zavazadel. Napětí v kolejnicích je $U = 750\,\mathrm{V}$. Zanedbejte odporové síly, účinnost motoru berte jako $80\,\%$. Souprava jede po rovině.*

*Karel se zamyslel nad výkonem metra.*

K výsledku se dostaneme pomocí výkonu dané soupravy. Výkon motorů je $\eta = 80\,\%$ příkonu. Platí tak $P = \eta UI$. Tímto výkonem je souprava urychlována a jeho okamžitá hodnota je

$$P = Fv = M_{\mathrm{tot}}av = (M + mN)\,av\,,$$

kde $F$ je okamžitá velikost síly ve směru vlaku, $v$ je jeho rychlost, $a$ je okamžité (ale i konstantní) zrychlení a $M_{\mathrm{tot}}$ je celková hmotnost vlaku i s cestujícími. Protože hmotnost a zrychlení považujeme za konstantní, pak nejvyšší výkon nastává těsně před dosažením maximální rychlosti (poté už souprava nezrychluje). Pokud bychom chtěli být realističtější, pak bychom museli se soupravou zkusit jet a zjistit, jakého zrychlení dokáže dosáhnout při jaké rychlosti. Dále ale budeme psát prostě $v_{\max}$ místo $v$.

Nyní již stačí dát předchozí vztahy dohromady a porovnat je

$$P = \eta UI = (M + mN)\,av_{\max} \quad\Rightarrow\quad I = \frac{(M + mN)\,av_{\max}}{\eta U} \doteq 15\,000\,\mathrm{A} = 15{,}0\,\mathrm{kA}\,.$$

Pokud by souprava zrychlovala dle předpokladu, pak by měla maximální odběr elektrického proudu právě těsně před dosažením maximální rychlosti. Jeho velikost by byla 15,0 kA.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha DD ... zábava na přednášce

*Jarda se ztratil na přednášce, a tak si začal hrát se svou propiskou, která má klidovou délku $l_0$. Postavil ji kolmo vzhůru na rovnou lavici a stlačil ji o $\Delta l \ll l_0$. Poté ji pustil, pružinka uvnitř se natáhla, propiska vyskočila kolmo vzhůru a její hrot dosáhnul výšky $h$. Jarda se takto chvíli bavil, ale pak ho to začalo nudit.*

*Propisku rozmontoval, pružinku vytáhnul a zbytek pera na ni pověsil. Jaká byla frekvence kmitů propisky na pružince? Hmotnost pružinky je mnohem menší než hmotnost zbytku pera.*

*Jarda se bojí, aby si tu situaci s perem někdo nepředstavil nevhodně...*

Energie pružnosti

$$\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$$

se přemění na zvýšení potenciální energie o $mg\left(h-l_0\right)$, kde $k$ je tuhost pružiny a $m$ je hmotnost pera. Zákon zachování energie pak můžeme také psát jako

$$\frac{k}{m}=\frac{2g\left(h-l_0\right)}{\left(\Delta l\right)^2}\,.$$

Vztah pro frekvenci harmonického oscilátoru s parametry $k$ a $m$ je

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Dosadíme-li tedy za zlomek v odmocnině, dostaneme

$$f=\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{2g\left(h-l_0\right)}}{\Delta l}\,.$$

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha DE ... horké plotny

*Danka si ohřívala vodu na dvou plotnách zároveň. Průměr velké plotny je $d_\mathrm{v} = 19\,\mathrm{cm}$, zatímco malé $d_\mathrm{m} = 15\,\mathrm{cm}$. Na větší plotně se ve velkém hrnci o hmotnosti $m_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{kg}$ ohřívají $V_\mathrm{v} = 2\,\ell$ vody. Na malé se v menším hrnci o hmotnosti $m_\mathrm{m} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ ohřívá $V_\mathrm{m} = 1\,\ell$ vody. Oba hrnce jsou vyrobeny z materiálu o měrné tepelné kapacitě $c = 450\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Předpokládejte, že příkon $P = 8\,\mathrm{kW}$ přivedený do dvouplotnového vařiče se rozdělí mezi plotny úměrně k velikosti jejich ploch. Účinnost každé plotny je $\eta = 80\,\%$. Dále uvažujte, že všechno teplo vydávané plotnou přebírá příslušný hrnec a voda v něm a z nich pak už nikam neuniká. Jaká bude časová prodleva mezi dosažením varu v malém a ve velkém hrnci? Na začátku mají voda i hrnce* *pokojovou teplotu $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$.*

*Danka experimentálně ověřovala fungování své kolejní dvouplotýnky.*

Pre množstvo tepla dodaného platňou $i$ za čas $t_i$ do príslušného hrnca s vodou, ktorý je na nej položený, platí

$$P_i t_i = Q_i = (m_i c + V_i \rho c_\mathrm{v})\,(T_1 - T_0)\ ,$$

kde $t_i$ je čas potrebný na zovretie vody v hrnci $i$, $\rho = 998\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody, $c_\mathrm{v} = 4\,184\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je jej merná tepelná kapacita a $T_1 = 100\,°\mathrm{C}$ je teplota varu vody. Zo zadania pre užitočný výkon platne $i$ platí

$$P_i = P\eta \frac{S_i}{S_\mathrm{v} + S_\mathrm{m}}\,.$$

Pritom $S_i = \pi \frac{d_i^2}{4}$ je plocha platne $i$. Z prvej rovnice vyjadríme čas ohrievania vody, a potom spočítame rozdiel $\Delta t = t_\mathrm{v} - t_\mathrm{m}$. Dosadením všetkých vyjadrení a príslušnými úpravami dostaneme rovnicu v tvare

$$\Delta t = \frac{T_1 - T_0}{P\eta}\left[(m_\mathrm{v} c + V_\mathrm{v}\rho c_\mathrm{v})\left(1 + \frac{d_\mathrm{m}^2}{d_\mathrm{v}^2}\right) - (m_\mathrm{m} c + V_\mathrm{m}\rho c_\mathrm{v})\left(1 + \frac{d_\mathrm{v}^2}{d_\mathrm{m}^2}\right)\right]\,.$$

Po dosadení číselných hodnôt zistíme, že $\Delta t \doteq 35\,\mathrm{s}$. Voda vo veľkom hrnci teda zovrie o $35\,\mathrm{s}$ neskôr ako v menšom.

***Daniela Pittnerová***
daniela@fykos.cz

## Úloha DF ... rychlé částice

*Z kosmu k nám přilétají velmi rychlé částice se střední dobou života $t_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$. V balónu ve výšce $h = 2\,\mathrm{km}$ nad povrchem jich detektor za nějaký čas naměří $N_1 = 1\,100$, dole na zemi je to za stejnou dobu měření $N_2 = 170$. Jaká je rychlost těchto částic? Výsledek uveďte jako násobek rychlosti světla c.*

*Danka vzpomínala na kurz STR.*

Ak sa častica pohybuje relativistickou rýchlosťou (blízkou rýchlosti svetla), dochádza k dilatácii času, čo znamená, že pozorovateľ v pokoji nameria dlhšiu dobu života častice $t$ ako je tá, ktorú vníma častica (vlastná doba života $t_0$). Teda platí

$$t = t_0 \gamma\,,$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

je gama faktor používaný v relativite. Konštanta $c$ označuje rýchlosť svetla a $v$ je rýchlosť pohybu častice voči pozorovateľovi v pokoji.

Častice sa teda rozpadajú pomalšie, než keby boli v pokoji. Napíšeme si rozpadový zákon

$$N_2 = N_1 \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{t}} = N_1 \mathrm{e}^{-\frac{h}{v t_0 \gamma}}\ ,$$

v ktorom sme písmenom $\tau = \frac{h}{v}$ označili čas, za aký doletí častica z výšky balónu k zemi. Polčas rozpadu je predĺžený faktorom $\gamma$.

Spojením týchto rovníc dostaneme

$$-\ln \frac{N_2}{N_1} = \frac{h}{v t_0 \gamma}\,.$$

Následne úpravami vyjadríme pomer $\frac{v}{c}$ ako

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c t_0}{h}\right)^2 \ln^2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}} \doteq 0{,}94\,.$$

Častice teda leteli 0,94 násobkom rýchlosti svetla.

***Daniela Pittnerová***
`daniela@fykos.cz`

## Úloha DG ... kulička padá z okna

*Malá kulička o hmotnosti* $50\,\mathrm{g}$ *se nabila nábojem* $50\,\mathrm{mC}$ *a skočila do úzkého svislého tunelu vysokého* $h = 50\,\mathrm{dm}$, *na jehož spodním konci je uprostřed vodorovně upevněna kružnice o poloměru* $50\,\mathrm{cm}$ *nabitá délkovou hustotou náboje* $\lambda$. *Jaká nejmenší může být tato hustota náboje, jestliže si kulička přeje, aby se nedostala níže než pod výšku* $\frac{h}{5}$ *nad kružnicí?*

*Jarda byl v kině na nového Bonda.*

Nejdříve spočítáme elektrostatický potenciál způsobený nabitou kružnicí. Označme $x$ vzdálenost kuličky od středu kružnice. Pak se všechny nabité body na kružnici s poloměrem $R$ nacházejí ve stejné vzdálenosti $\sqrt{R^2 + x^2}$ od kuličky. Potenciální elektrostatická energie kuličky s nábojem $Q$ tak je

$$E_\mathrm{e} = \frac{2\pi \lambda R Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}\,.$$

Při nábojích $Q$ a $\lambda$ stejného znaménka působí síla vzhůru, má tedy směr kladného růstu $x$. Derivace potenciálu je záporná, ale síla má opačné znaménko než gradient potenciální energie, proto bude opět kladná. Potenciální energie kuličky způsobená tíhovým polem je jednoduše

$$E_\mathrm{p} = mgx\,,$$

kde $m$ je hmotnost kuličky. V bodě $x = h$ je její kinetická energie nulová. Dle zadání máme najít další takový bod, označme jeho vzdálenost od středu $x_0 = h/5$. Celková energie se zachovává, takže

$$E_\mathrm{e} + E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{\lambda R Q}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}} + mgh = \frac{\lambda R Q}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x_0^2}} + mgx_0\,.$$

Z rovnice vyjádříme $\lambda$ jako

$$\lambda = \frac{2\varepsilon_0 mg\,(h - x_0)}{RQ\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)} = \frac{8\varepsilon_0 mgh}{5RQ\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{5}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)} = 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Pokud by $Q$ a $\lambda$ měly opačné znaménko, působila by mezi nimi přitažlivá síla. Tedy pokud by kulička byla nad kružnicí, přitahovala by ji dolů tíhová i elektrická síla, proto by nad kružnicí zastavit nemohla (je možné, že by se zastavila pod ní). Proto obě dvě nábojové veličiny musí mít stejné znaménko. Hledáme tedy kladnou hodnotu $\lambda$.

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha DH ... útok na vlak

*Jeden uličník se rozhodl, že zaútočí na jedoucí vlak. Stoupnul si před něj na kolej a hodil proti němu hopík s vodorovnou rychlostí $u = 13\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. V tu chvíli se vlak nacházel ve vzdálenosti $d = 17\,\mathrm{m}$ od něj a přibližoval se stálou rychlostí. Hopík se od vlaku pružně odrazil a doletěl k uličníkovi po čase $T = 1{,}5\,\mathrm{s}$ od vyhození. Překvapený pachatel pochopil, že útok se nezdařil a je na čase zmizet. Jaký mu nyní zbývá čas na útěk, než jeho aktuální pozicí projede vlak?*

*Jarda by byl rád, aby vlaky do Prahy jezdily rychleji.*

Označme čas $t_1$ od vyhození do nárazu hopíku do vlaku a $t_2$ čas od nárazu do návratu hopíku k uličníkovi. Pak zřejmě

$$T = t_1 + t_2\,.$$

Za čas $t_1$ urazí hopík a vlak dohromady vzdálenost $d$, tedy platí

$$d = ut_1 + vt_1\,,$$

kde $v$ je rychlost vlaku. V soustavě pohybující se rychlostí $v$ spolu s vlakem vlak stojí a při srážce do něj hopík narazí rychlostí $u + v$. Protože srážka je dokonale pružná, stejnou rychlostí se v této soustavě odrazí zpět. Přechodem zpět do soustavy spojené se zemí získáme rychlost hopíku po odrazu jako součet rychlosti soustavy spojené s vlakem a rychlosti hopíku v této soustavě, tedy

$$u_1 = v + u + v = u + 2v\,.$$

Touto rychlostí letí čas $t_2$ a mezi srážkou a uličníkem je vzdálenost $d - vt_1$. Takže máme třetí rovnici

$$d - vt_1 = (u + 2v)\,t_2\,.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$d = (u + v)\,t_2 + v\,(t_1 + t_2)\,,$$

kam dosadíme z obou dalších rovnic

$$d = d\frac{t_2}{t_1} + vT\,.$$

Dosazením do třetí rovnice za $d$ najdeme poměr $t_1$ a $t_2$, který vložíme do předešlého vzahu. Získáváme

$$d = d\frac{u}{u + 2v} + vT \quad \Rightarrow \quad v = \frac{d}{T} - \frac{u}{2}\,.$$

Čas, na který se ptá zadání, je

$$t = \frac{d - vT}{v} = \frac{T^2 u}{2d - Tu} = 2{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha EA ... pokažený reostat

*Vojta našel doma dvě LED diody – červenou a zelenou. Zjistil, že pouhým okem pozná, že červená svítí, protéká-li jí proud o velikosti alespoň $I_1 = 10\,\mathrm{mA}$, zatímco proud v zelené musí být větší než $I_2 = 20\,\mathrm{mA}$. Tyto LED diody zapojoval do série s lineárním reostatem o odporu v rozmezí $R_1 = 100\,\Omega$ až $R_2 = 400\,\Omega$ v obvodu se zdrojem napětí o velikosti $U = 5{,}0\,\mathrm{V}$. Jednou se mu ale ulomil jezdec reostatu a zasekl se v náhodné pozici. Zkusil tedy zapojit červenou LED diodu a zjistil, že svítí. Jaká je pravděpodobnost, že bude svítit i zelená LED dioda, zapojíme-li ji místo červené? Obě LED diody mají stejné pracovní napětí $U_\mathrm{p} = 1{,}7\,\mathrm{V}$.*

*Vojta si hrál s vánočními světýlky.*

Nejprve musíme určit proud protékající LED diodou pro obecnou hodnotu odporu reostatu $R$. Zřejmě bude platit

$$U = U_\mathrm{p} + IR \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U - U_\mathrm{p}}{R}\,.$$

Při výpočtu podmíněné pravděpodobnosti využijeme vztahu

$$P(I \geq I_2 | I \geq I_1) = \frac{P(I \geq I_2)}{P(I \geq I_1)}\,,$$

který vyjadřuje hledanou pravděpodobnost v závislosti na pravděpodobnostech, že bude proud větší než jednotlivé dílčí proudy. Upravme nyní zkoumaný výraz $P(I \geq I_i)$

$$P(I \geq I_i) = P\left(\frac{U - U_\mathrm{p}}{R} \geq I_i\right) = P\left(R \leq \frac{U - U_\mathrm{p}}{I_i}\right)\,.$$

Pravděpodobnost, že bude odpor $R$ větší než hodnota $\frac{U - U_\mathrm{p}}{I_i}$, pak již určíme snadno,

$$P\left(R \leq \frac{U - U_\mathrm{p}}{I_i}\right) = \frac{\frac{U - U_\mathrm{p}}{I_i} - R_1}{R_2 - R_1} = \frac{U - U_\mathrm{p} - R_1 I_i}{(R_2 - R_1)\, I_i}\,.$$

Dáme-li vše dohromady, dostaneme

$$P(I \geq I_2 | I \geq I_1) = \frac{\frac{U - U_\mathrm{p} - R_1 I_2}{(R_2 - R_1) I_2}}{\frac{U - U_\mathrm{p} - R_1 I_1}{(R_2 - R_1) I_1}} = \frac{I_1}{I_2}\left(1 + R_1 \frac{I_1 - I_2}{U - U_\mathrm{p} - I_1 R_1}\right) \doteq 0{,}28\,.$$

Zjistili jsme, že obecné řešení nezávisí na $R_2$, neboť jakousi informaci o maximálním odporu máme již obsaženou ve faktu, že se nám podařilo rozsvítit červenou LED diodu.

***Vojtěch David***
vojtech.david@fykos.cz

## Úloha EB ... rozmazané spektrum rotací

*Ve spektru hvězdy nikdy nemůžeme pozorovat tak ostré spektrální čáry, jako když si ty samé oblasti spektra vytvoříme v laboratoři. Jedním z důvodů je rotace hvězd. Na jakou šířku (vyjádřete ji jako rozdíl krajních vlnových délek $\Delta\lambda$) se tímto efektem rozšíří spektrální čára o původní frekvenci $f_0$? Hvězdu považujeme za kouli o poloměru $R$, která na rovníku rotuje s úhlovou rychlostí $\omega$. Uvažujeme, že ostatní parametry jsou konstantní a čára byla původně ostrá.*

*Karel má rád astrofyziku.*

Protože nás zajímá pouze šířka spektrální čáry, je nám vlastně jedno, jak rychle se od nás daná hvězda vzdaluje (případně se k nám přibližuje). To, že tento údaj v zadání není, resp. jej máme považovat za konstantní, tedy nijak nevadí.

Jeden okraj hvězdy se od nás bude vzdalovat rychlostí $R\omega$, kdežto druhý se k nám stejnou rychlostí bude přibližovat. Pro vlnové délky $\lambda_1$ a $\lambda_2$ záření dopadajícího z těchto konců můžeme z Dopplerova jevu psát

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{c + R\omega}{c}\,,$$
$$\lambda_2 = \lambda_0 \frac{c - R\omega}{c}\,,$$

kde $\lambda_0$ je původní vlnová délka spektrální čáry a $c$ je rychlost světla ve vakuu. Spektrální čára se tedy rozmaže na šířku

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2R\omega\lambda_0}{c}\,.$$

Máme zadanou frekvenci $f_0$, pro kterou platí $f_0 = c/\lambda_0$. Vztah upravíme na

$$\Delta\lambda = \frac{2R\omega\lambda_0}{c} = \frac{2R\omega}{f_0}\,,$$

čímž dostaneme požadovaný výsledek. Ve skutečnosti budou okraje spektrální čáry relativně slabé oproti středu. Současně je mnoho další efektů působících jak po cestě, tak při detekci, které spektrální čáry rozšiřují, ale tento vzorec se dá v praxi použít pro přibližné určení rychlosti rotace.

***Karel Kolář***
karel@fykos.cz

## Úloha EC ... pozor na hlavu

*Jarda na koleji nerad chodí vynášet odpad, a tak se ho zbavuje tím, že ho prostě háže z okna. Jednoho dne tak vyhodil dvě kuličky, obě o poloměru $R = 8\,\mathrm{cm}$. Jedna má hmotnost $m_1 = 85\,\mathrm{g}$ a druhá $m_2 = 123\,\mathrm{g}$. Kolikrát vyšší měla při dopadu druhá kulička kinetickou energii oproti první? Jarda má pokoj až v šestnáctém patře.*

*Jardu by zajímalo, jestli je taková kulička vražedný nástroj.*

Označme veličiny ze zadání po řadě $R$, $m_1$ a $m_2$. Protože kuličky padají z velké výšky, můžeme očekávat, že se jejich rychlost ustálila a tíhová síla je v rovnováze s odporovou. Protože proudění zjevně nebude laminární, můžeme tuto rovnost zapsat jako

$$kv_i^2 = F_\mathrm{o} = F_g = m_i g$$

pro $i = 1, 2$. Rovnici upravíme na

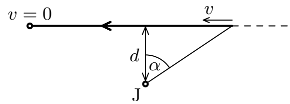
$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{k} m_i^2\,.$$

Protože $g$ a $k$ jsou pro obě kuličky stejné, poměr kinetických energií kuliček je roven druhé mocnině poměru jejich hmotností, tedy

$$\frac{E_{\mathrm{k}2}}{E_{\mathrm{k}1}} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \doteq 2{,}09\,.$$

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha ED ... kachna




*Jarda sedí na břehu u klidné hladiny rybníka. Na vodu zrovna přistává kachna takovým způsobem, že se pohybuje po přímce vzdálené $d = 2{,}8\,\mathrm{m}$ od Jardy. Kachna po dotyku s hladinou začne brzdit a pohybuje se rovnoměrně zpomaleně. Její pohyb způsobuje na rybníku vlny. Ty k Jardovi dorazí za čas $t_1 = 10{,}3\,\mathrm{s}$ od momentu, kdy kachna dosedla na hladinu z úhlu $\alpha = 7{,}0^\circ$ (viz obrázek). Kachna zastaví za čas $t_2 = 3{,}1\,\mathrm{s}$. Jakou dráhu za tuto dobu urazila? Rychlost vln na hladině je $c = 0{,}30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.* *Jarda v zimě krmí ptáčky.*

Uvažujme nejdříve, že kachna přistála na zmíněné přímce ve vzdálenosti $\frac{d}{\cos\alpha} = 2{,}82\,\mathrm{m}$ od Jardy a vlny se z tohoto místa šíří rychlostí $c$ přímo k němu. Dorazily by po čase $t_1$ po přistání a urazily by tak vzdálenost $ct_1 = 3{,}09\,\mathrm{m}$. Toto číslo se ovšem nerovná prvnímu určení vzdálenosti.

Z tohoto zjištění vyplývá, že kachna měla po nějaký čas svého bržděni vyšší rychlost než $c$. Vlny se tak šíří z jiného místa než z toho, kde kachna přistála. Pokud označíme $v$ rychlost kachny, vznikají při $v > c$ vlny ve tvaru trojúhelníku s vrcholovým úhlem $\beta = \arcsin\frac{c}{v}$. Tyto vlny se šíří kolmo ke své vlnoploše. Z nákresu je zřejmé, že $\beta = \alpha$. Známe tedy rychlost kachny v okamžiku, kdy se od ní začaly šířit vlny, které k Jardovi dorazily pod úhlem $\alpha$. Tato rychlost je

$$v = \frac{c}{\sin\alpha}$$

a vznikly před časem

$$t_\mathrm{v} = \frac{d}{\cos\alpha c}\,,$$

než dorazily k Jardovi. Jestliže označíme $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ čas, kdy kachna dosedla na hladinu, vznikly tyto vlny v čase

$$t_1 - t_\mathrm{v} = t_1 - \frac{d}{\cos\alpha c}$$

a kachna v době jejich vzniku měla rychlost $v = \frac{c}{\sin\alpha}$. V čase $t_2$ má rychlost nulovou, takže dokázala zpomalit za čas $t_2 - (t_1 - t_\mathrm{v})$ o $v$. Její zrychlení tak je

$$a = \frac{v}{t_2 - (t_1 - t_\mathrm{v})} = \frac{\frac{c}{\sin\alpha}}{t_2 - t_1 + \frac{d}{\cos\alpha c}}\,.$$

Kachna tak na hladině urazila dráhu

$$s = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{ct_2^2}{2\left((t_2 - t_1)\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha\frac{d}{c}\right)} = 5{,}4\,\mathrm{m}\,.$$

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha EE ... zapalujeme mravence

*V krásný slunečný den, v poledne letního slunovratu v Praze, kdy je teplota vzduchu $35\,^\circ\mathrm{C}$, vezmeme spojnou čočku lupy o průměru $D = 6\,\mathrm{cm}$ a umístíme ji kolmo ke slunečním paprskům. Do ohniska lupy za čočkou vložíme malou černou kuličku o poloměru $r = 1\,\mathrm{mm}$ s vysokou tepelnou vodivostí.*

*Na jaké hodnotě se ustálí její teplota? Přenos tepla konvekcí zanedbáme. Atmosférou projde 60 % slunečního záření a přes sklo čočky 65 % energie záření.*

*Jarda si chtěl zvětšit hmyz, ale špatně to dopadlo.*

Do zemské atmosféry vstupuje sluneční záření s plošným výkonem odpovídajícím solární konstantě $K = 1\,361\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Atmosférou na povrch Země projde ovšem jenom $K_\mathrm{Z} = 0{,}6K \doteq 817\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Tato hodnota se sníží po průchodu čočkou na $K_\mathrm{C} = 0{,}65K_\mathrm{Z} \doteq 531\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Protože je lupa natočena kolmo k paprskům, je celkový výkon procházející lupou

$$P = 0{,}6\cdot 0{,}65KS = \frac{0{,}39\pi D^2 K}{4}\,.$$

Čočka tento výkon usměrňuje do ohniska, kde se nachází černá kulička, která jej přijímá.

V rovnovážném stavu tato kulička přijme tolik energie, kolik vyzáří. Energii přijímá od Slunce skrz lupu a také od svého okolí vlivem záření. Rovnice rovnováhy tak bude mít tvar

$$4\pi r^2\sigma T^4 = 4\pi r^2\sigma T_\mathrm{o}^4 + \frac{0{,}39\pi D^2 K}{4}\,,$$

kde $T$ je teplota kuličky, $\sigma$ je Stephan-Boltzmannova konstanta a $T_\mathrm{o} = 308{,}15\,\mathrm{K}$ je teplota okolí. Odtud

$$T = \sqrt[4]{T_o^4 + \frac{0{,}39D^2K}{16r^2\sigma}} \doteq 1\,206\,\mathrm{K} = 933\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha EF ... nabitý vrtulník

*Organizátoři FYKOSu vyrazili na výlet a nyní se ve vrtulníku vznáší nad severním magnetickým pólem Země, kde naměřili velikost magnetické indukce $B = 65\,\mathrm{\mu T}$. Délky listů vrtulníku od rotoru k jejich koncům jsou $L = 6\,\mathrm{m}$. Jaké napětí vzniká mezi koncem listu a rotorem, který se otáčí s frekvencí $f = 3\,\mathrm{s^{-1}}$?*

*Jarda často cestuje vrtulníkem na severní pól.*

Uvažujme malý element listu o délce $\mathrm{d}r$ a vzdálenosti od středu otáčení $r$. Na elektrony v něm působí magnetická síla $F_\mathrm{m} = Bvq$, která má směr podél listu. Ta je v rovnovážném stavu kompenzována indukovanou elektrickou silou $F_\mathrm{e} = Eq$. Rychlost $v$ závisí na vzdálenosti od osy rotace jako $v = \omega r$. Z rovnosti těchto sil dostáváme

$$E = B\omega r\,.$$

Napětí získáme integrací intenzity podél listu

$$U = \int_0^L B\omega r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}B\omega L^2\,.$$

Napětí mezi hlavním rotorem a koncem listu je tedy

$$U = \frac{1}{2}B\omega L^2 = \pi B f L^2 = 22\,\mathrm{mV}\,.$$

Napětí je tak opravdu malé a zanedbatelné.

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha EG . . . dlouhé čekání

*Legovi připadá, že nějak často čeká na metro příliš dlouho (někdy až 10 minut!). Tak si spočítal, kolik procent z veškerého času stráveného čekáním na metro zabírají čekání delší jak polovina časového intervalu mezi odjezdem předchozího metra a příjezdem toho následujícího. Kolik mu vyšlo, jestliže to spočítal správně? Lego samozřejmě přijde na stanici v náhodný moment tohoto intervalu.*

*Lego nerad čeká.*

Označme si dĺžku časového intervalu medzi odchodom jedného a príchodom druhého metra ako $T$. Potom čas Legovho čakania je z intervalu $(0, T)$ a zo zadania vieme, že všetky časy z tohto intervalu majú rovnakú pravdepodobnosť. Konkrétne pravdepodobnosť, že Legov čas čakania bude z intervalu $(t, t + \mathrm{d}t)$, je pre všetky $t < T$ rovná $\mathrm{d}t/T$. Priemerné čakanie teda bude trvať

$$\bar{t} = \int_0^T t \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{1}{T} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{T}{2}\,.$$

To by sme intuitívne mohli očakávať. Akú časť z tohto času ale tvoria čakania dlhšie než $T/2$? Zistíme to podobným výpočtom

$$\bar{t}_{t>T/2} = \int_{T/2}^T t \frac{\mathrm{d}t}{T} = \frac{1}{T} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{T/2}^T = \frac{1}{T} \left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^2}{8}\right) = \frac{3}{8} T\,.$$

Napriek tomu, že čakania dlhšie ako polovica časového intervalu tvoria len polovicu počtu všetkých čakaní, tvoria značnú časť z celkového času čakania

$$\frac{\frac{3}{8}T}{\frac{1}{2}T} = \frac{3}{4} = 75\,\%\,.$$

Asi preto sa sa Legovi zdá, že vždy čaká neskutočne dlho.

***Šimon Pajger***
`legolas@fykos.cz`

## Úloha EH . . . terénní výhoda

*Představme si, že stojíme uprostřed rozlehlého rovinného svahu se sklonem $\alpha = 25^\circ$ vůči vodorovné rovině. Jaký bude poměr největšího dostřelu přesně proti svahu a největšího dostřelu opačným směrem? Předpokládejte, že maximální rychlost projektilu nezávisí na úhlu výstřelu.*

*Dodo se pokoušel střílet do kopce.*

Zafixujme maximálnu rýchlosť výstrelu $v$. Ak by sme vystrelili pomalšie, zrejme bude dostrel menší. Úloha sa dá riešiť niekoľkými spôsobmi. Najpriamočiarejší je výpočet dostrelu pre konkrétny uhol náklonu roviny v závislosti na uhle výstrelu a následná maximalizácia tejto hodnoty v závislosti na uhle výstrelu ako parametra (pomocou derivácie). Tento postup je však výpočetne pomerne náročný a zbytočne zdĺhavý. V našom riešení využijeme teda fakt, že všetky miesta v priestore, ktoré vieme pri výstrele danou rýchlosťou zasiahnuť ležia pod tzv. obalovou (česky ochrannou) parabolou.

Zvoľme počiatok kartézskej sústavy súradníc v bode výstrelu a x-ovú súradnú os vo vodorovnom smere rastúceho svahu. Svah je potom v 2D reze s najväčším sklonom možné popísať pomocou rovnice

$$y = x \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Rovnicu obalovej paraboly $y = \alpha x^2 + \beta$ získame zo znalosti jej vrcholu v bode vo výške $h = \frac{v^2}{2g} = \beta$ nad bodom výstrelu (nájdeme ľahko zo zachovania energie) a maximálneho dostrelu na vodorovnej rovine $d = \frac{v^2}{g} = \sqrt{\frac{\beta}{-\alpha}}$ (z dráh urazených vo zvislom a vodorovnom smere). Z toho už môžeme zostaviť rovnicu tejto paraboly

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2 + \frac{v^2}{2g}\,.$$

Pre nájdenie polohy bodov dopadu dáme do rovnosti $y$-ové súradnice oboch kriviek a dostaneme kvadratickú rovnicu

$$\frac{g}{2v^2}x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{v^2}{2g} = 0\,,$$

ktorej dva korene sú príslušné dostrely (merané v horizontálnom smere, čo nám stačí, keďže ako odpoveď chceme pomer a terén je rovinný – kosínusy sklonu sa teda navzájom vykrátia)

$$x_{+,-} = \frac{v^2}{g}\left(-\,\mathrm{tg}\,\alpha \pm \sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1}\right) = \frac{v^2}{g}\frac{-\sin\alpha \pm 1}{\cos\alpha}\,,$$

kde znamienko výsledku rozlišuje smer. Pre pomer dostrelov máme už ľahko

$$w = \left|\frac{x_+}{x_-}\right| = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \doteq 0{,}406\,.$$

***Jozef Lipták***
`liptak.j@fykos.cz`

## Úloha FA ... kostka ve skluzu

*Kostku ledu o hmotnosti $m_0 = 7{,}34\,\mathrm{g}$ a teplotě $T = 0\,\mathrm{^\circ C}$ položíme na dlouhou horkou nakloněnou rovinu se sklonem $\alpha = 15^\circ$. Od té začne rychlostí $P = 1\,\mathrm{kW}$ přijímat teplo. Vypočítejte, jakou práci vykonala tíhová síla na urychlování ledu. Předpokládejte, že kostka taje rovnoměrně a pouze od spodní podstavy. Taktéž zanedbejte veškeré odporové síly.*

*Vojta sledoval staré reklamy.*

Na kostku bude v průběhu pohybu působit síla o velikosti

$$F(t) = m(t)\,g\sin\alpha\,.$$

Práci vykonanou tíhovou silou proto určíme podle vztahu

$$W = \int_0^{s_1} m(t)\,g\sin\alpha\,\mathrm{d}s = \int_0^{t_1} m(t)\,v(t)\,g\sin\alpha\,\mathrm{d}t\,.$$

Nejprve určeme, jak dlouho se kostka pohybovala. Označme $l_\mathrm{t}$ měrné skupenské teplo tání ledu. Vypočítejme čas $t_1$, za který kostka roztaje

$$t_1 = \frac{Q}{P} = \frac{m_0 l_\mathrm{t}}{P}\,.$$

Dále potřebujeme vyjádřit rychlost kostky v závislosti na čase. Všimněme si proto, že zrychlení bude v čase konstantní s velikostí

$$a = g \sin \alpha \, .$$

Bude tedy platit

$$v = tg \sin \alpha \, .$$

Nakonec nám zbývá vyjádřit hmotnost kostky v závislosti na čase. Uvědomme si, že za čas $t$ kostka přijme teplo $Pt$ a tedy roztaje led o hmotnosti $Pt/l_\mathrm{t}$. Máme tak už vše připraveno a můžeme přepsat integrál do tvaru

$$W = \int_0^{t_1} \left(m_0 - \frac{Pt}{l_\mathrm{t}}\right) tg^2 \sin^2 \alpha \, \mathrm{d}t = g^2 \sin^2 \alpha \int_0^{t_1} m_0 t - \frac{Pt^2}{l_\mathrm{t}} \, \mathrm{d}t = g^2 \sin^2 \alpha t_1^2 \left(\frac{m_0}{2} - \frac{Pt_1}{3l_\mathrm{t}}\right) ,$$

odkud finálním dosazením za $t_1$ můžeme psát

$$W = \frac{g^2 \sin^2 \alpha m_0^3 l_\mathrm{t}^2}{6P^2} \doteq 0{,}047\,\mathrm{J} \, .$$

*__Vojtěch David__*
`vojtech.david@fykos.cz`

## Úloha FB ... dvě nekonečna čoček

*Jarda dostal k Vánocům velmi velké množství opravdu hodně tenkých spojných čoček a poskládal je velmi těsně za sebe tak, že první měla ohniskovou vzdálenost $f$, další $2f$, třetí $4f$ a tak dále. Také náhodou našel jedno duté zrcadlo s poloměrem křivosti $f$, které umístil bezprostředně za tuto řadu čoček. Do ohniska první čočky vložil svítící předmět. Jak daleko před zrcadlem se zobrazil jeho obraz? Pokud se zobrazil za zrcadlo, uveďte vzdálenost jako zápornou.*

*Jardu už nebaví úlohy s nekonečnými obvody, tohle je něco nového!*

Nejdříve se podíváme na to, jak je to s průchodem paprsku dvěma čočkami vedle sebe. Nechť $a$ je vzdálenost objektu před první čočkou s ohniskovou vzdáleností $f_1$. Těsně za ní je druhá čočka s ohniskovou vzdáleností $f_2$. Pomocí Gaussovy zobrazovací rovnice najdeme polohu obrazu $a'$ objektu jako

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1} \, .$$

Tato vzdálenost je kladná, pokud se objekt zobrazil za první čočku. Obraz zobrazíme druhou čočkou, přičemž nyní je vzdálenost vzoru rovna $-a'$. Druhá čočka zobrazí objekt na

$$a'' = \frac{-a' f_2}{-a' - f_2} = \frac{-\left(\frac{af_1}{a-f_1}\right) f_2}{-\frac{af_1}{a-f_1} - f_2} = \frac{af_1 f_2}{af_1 + af_2 - f_1 f_2} = \frac{aF}{a - F} \, ,$$

kde $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. Odvodili jsme tedy zajímavý vztah, že pro dvě čočky v těsné blízkosti za sebou je jejich celková optická mohutnost součtem optických mohutností obou čoček.

Vztah můžeme iterovat a je zřejmé, že celková optická mohutnost všech Jardových čoček v řadě za sebou je

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{2}{f} \, ,$$

odkud $F = \frac{f}{2}$. Ohnisková vzdálenost této řady čoček je tak poloviční než u první čočky. Dodejme jen, že nekonečný součet výše můžeme dopočítat například ze vztahu pro nekonečnou geometrickou řadu.

Soustava těchto čoček tedy zobrazí objekt nacházející se ve vzdálenosti $f$ před ní do vzdálenosti

$$x = \frac{f\frac{f}{2}}{f - \frac{f}{2}} = f\,.$$

Nyní se zabývejme zobrazením na dutém zrcadle. To má ohniskovou vzdálenost rovnou polovině poloměru křivosti. Bod se vzdáleností $-f$ (záporné znaménko je způsobeno tím, že soustava čoček objekt zobrazila za zrcadlo) zobrazí na

$$x' = \frac{-x\frac{f}{2}}{-x - \frac{f}{2}} = \frac{f}{3}\,.$$

Nyní je objekt zobrazen ve vzdálenosti $x' = \frac{f}{3}$ před zrcadlem.

Další zobrazení je opět pomocí soustavy čoček. Vzor se nyní nachází $x' = -\frac{f}{3}$ za soustavou čoček. Naposledy použijeme zobrazovací rovnici

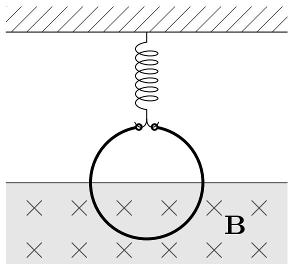
$$x'' = \frac{x'\frac{f}{2}}{x' - \frac{f}{2}} = \frac{\frac{-f}{6}}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{f}{5}\,.$$

Objekt se celou soustavou zobrazil do vzdálenosti $\frac{f}{5}$ před zrcadlo a čočky.

***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha FC ... kmitavé napětí

*Kovovou obruč o poloměru $r$ a hmotnosti $m$ zavěsíme na pružinu o tuhosti $k$ takovým způsobem, že se její spodní polovina nachází v magnetickém poli o indukci $B$, které je na obruč kolmé (viz obrázek). Jaká bude maximální velikost napětí na obruči, rozkmitáme-li ji s amplitudou výchylky $r$? Předpokládejte, že napětí měříme v místě zavěšení na pružinu a že je v tomto místě obruč rozpojená.* *Vojta vymýšlel inovativní zdroje napětí.*




Nejprve si uvědomme, že obručí neprochází proud, protože je rozpojená. Z toho důvodu nemusíme řešit žádné tlumení kmitání. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce platí

$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -Bl\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -Blv\,,$$

kde $y$ je okamžitá výchylka pružiny, $l$ vzdálenost mezi dvěma body obruče, které leží na rozhraní magnetického pole, a $v$ je okamžitá rychlost obruče. Nyní si napišme závislost okamžité výchylky kmitání v závislosti na čase

$$y = r\cos\omega t\,,$$

odkud přímo určíme okamžitou rychlost jako

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega r \sin \omega t \,.$$

Dále si uvědomme, že z Pythagorovy věty bude platit

$$l = 2\sqrt{r^2 - y^2} = 2r\sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = 2r \left|\sin \omega t\right| \,.$$

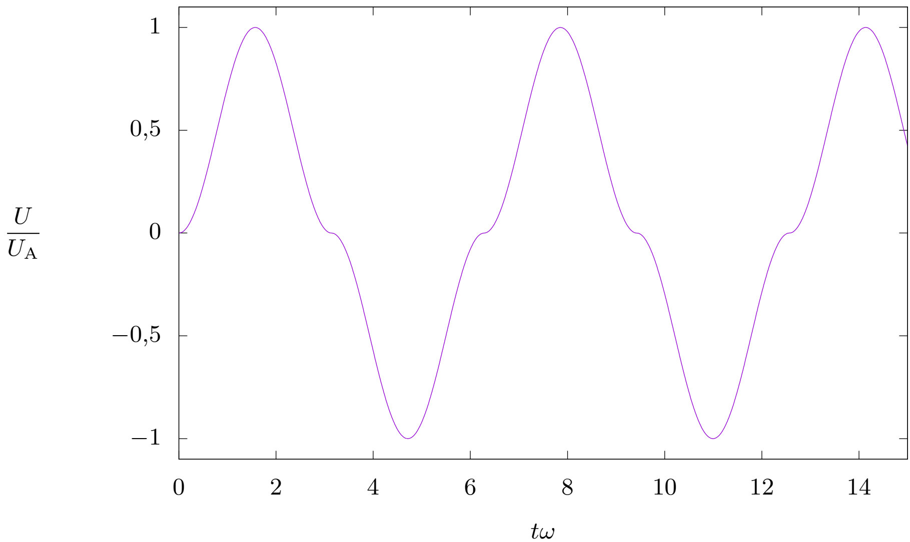
Nyní už konečně můžeme psát

$$U = 2Br^2\omega \left(\sin \omega t \left|\sin \omega t\right|\right) \,,$$

kde výraz v závorce nabývá hodnot mezi $-1$ a 1. Rozepíšeme-li úhlovou frekvenci $\omega$ pro pružinu, dostaneme amplitudu napětí

$$U_\mathrm{A} = 2Br^2\sqrt{\frac{k}{m}} \,.$$

Na závěr zmiňme, že úlohu lze řešit i přímým vyjádřením obsahu kruhové úseče v závislosti na čase, odkud dostaneme tentýž výsledek. Pro zajímavost také uvádíme grafické znázornění takového průběhu napětí.




Obr. 1: Průběh napětí.

***Vojtěch David***
vojtech.david@fykos.cz

## Úloha FD ... vyčerpané Slunce

*Slunce vlivem termojaderné fúze ztrácí svou hmotnost, která se mění na záření. Určete, za jak dlouho se kvůli tomuto jevu změní vzdálenost Země od Slunce o* $1\,\mathrm{m}$. *Orbitu Země považujte za kruhovou. Odpověď udejte v letech.* *Jarda si všiml, že svět už není jako dřív.*

Země je udržovaná na kruhové dráze dostředivou silou vyvolanou gravitací Slunce. To můžeme zapsat jako

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{MmG}{r^2}\,,$$

kde $m$ je hmotnost Země, $M$ je hmotnost Slunce, $v$ je rychlost pohybu Země kolem Slunce a $r$ je vzdálenost Země od Slunce. Tuto rovnici po přenásobení $r^2$ zderivujme podle času

$$2vr\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,.$$

V soustavě stále platí zákon zachování momentu hybnosti na jednotku hmotnosti Země ve tvaru $l = rv =$ konst. Ten také můžeme zderivovat podle času a dostaneme

$$v\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Tento vztah dosadíme do výše zderivované rovnice a dostaneme

$$2vr\left(-\frac{v}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) + v^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\,.$$

Změna hmotnosti Slunce v čase je dána přeměnou jeho klidové hmotnosti na záření. To můžeme zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{L_\odot}{c^2}\,,$$

kde $L_\odot$ je střední zářivý výkon Slunce. Dosazením a uvážením, že změny jsou řádově malé, dostaneme přechodem od diferenciálů ke konečným změnám

$$\Delta t = v^2c^2\frac{\Delta r}{GL_\odot}\,,$$

Vyjádřením kvadrátu rychlosti z první rovnice a dosazením dostaneme

$$\Delta t = \frac{M_\odot c^2}{L_\odot}\frac{\Delta r}{r} \doteq 99\,\mathrm{let}\,.$$

Vlivem úbytku hmotnosti Slunce skrz záření se od něj Země vzdálí o jeden metr za necelých sto let, což je opravdu zanedbatelná vzdálenost, která je však měřitelná pomocí radaru.

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha FE ... kulička to neodhadla

*V předchozích dvou příkladech se kulička během svého skoku někde po cestě zastavila. Nyní si řekla, že by se ve vzduchu ráda vznášela. Ze spodu si kolmo vzhůru pustila monochromatický zdroj světla o plošném výkonu $P$ a oblékla si na sebe dokonale odrazivý plášť. Pak vyskočila do tohoto proudu světla z okna ve výšce $H$. Její poloměr je $R$ a hmotnost $m$. Bohužel si špatně spočítala potřebný výkon a proud světla ji tak ve vzduchu neudržel. Jakou rychlostí dopadla na zem?* *Ani tohle Jarda na kolejích zkoušet nebude.*

Spočítejme nejdříve, jakou silou působí na kuličku proud světla. Uvažujme foton o hybnosti $p_1 = \frac{hf}{c}$ letící ze zdroje kolmo vzhůru, který do kuličky narazí. Místo nárazu na kuličce paramatrizujme úhlem $\varphi$, který svírá spojnice středu a bodu nárazu na plášti se svislou přímkou procházející středem kuličky. Dle zákona dopadu a odrazu se foton odrazí tak, že jeho hybnost má odchylku od svislé osy $\pi - 2\varphi$.

Svislá hybnost fotonu je tak nyní $p_2 = p_1 \cos(\pi - 2\varphi)$. Jeho změna hybnosti ve svislém směru je

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 \left(1 - \cos(\pi - 2\varphi)\right) = p_1 \left(1 + \cos 2\varphi\right) .$$

Celková změna hybnosti kuličky ve vodorovném směru bude vzhledem k symetrii nulová, nemusíme ji proto dále uvažovat.

Víme, že pro energii fotonu platí $E = hf$, proto je počet fotonů vyzářených na jednotku plochy za jednotku času roven

$$n = \frac{P}{hf} ,$$

plošná změna hybnosti (tedy vlastně tlak) potom je

$$n\Delta p = \frac{P}{c} \left(1 + \cos(2\varphi)\right) .$$

Celkovou sílu způsobenou tlakem záření najdeme integrací této plošné změny hybnosti přes plochu. V závislosti na $\varphi$ integrujeme přes kroužkový element. Jednoduše geometricky nahlédneme, že bude platit

$$\mathrm{d}S = 2\pi R \sin\varphi R \,\mathrm{d}\varphi \cos\varphi = \pi R^2 \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi .$$

Velikost síly tak je

$$F_z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P}{c} \left(1 + \cos 2\varphi\right) \pi R^2 \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^2 P}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2\varphi\right) \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varphi .$$

Integrand upravme na

$$\sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{2} ,$$

aby se nám jednodušeji integrovalo. Dostáváme

$$F_z = -\frac{\pi R^2 P}{c} \left[\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2 P}{c} .$$

Celková síla působící na kuličku tak je

$$F = mg - F_z = mg - \frac{\pi R^2 P}{c}$$

a ze zákona zachování energie tak najdeme dopadovou rychlost jako

$$v = \sqrt{\frac{2FH}{m}} = \sqrt{2H\left(g - \frac{\pi R^2 P}{mc}\right)}\,.$$

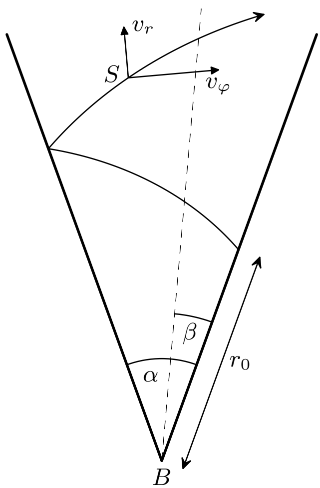
***Jaroslav Herman***
jardah@fykos.cz

## Úloha FF ... cik cak

*Rickon Stark se vzdaluje od Ramsayho Boltona konstantní rychlostí $v_r = 3{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Představme si ale, že zvolí lepší strategii než v originále a poběží cik cak. Bude totiž zároveň běžet rychlostí o velikosti $v_\varphi = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, která však bude kolmá na směr rychlosti $v_r$. Ramsay stojí ve středu kruhové výseče s úhlem $\alpha = 20°$ a Rickon běží vždy od jednoho jejího okraje ke druhému a zpět. Na začátku se nachází ve vzdálenosti $r_0 = 8\,\mathrm{m}$ od Ramsayho na okraji výseče. Ramsay ví, že jím vystřelený šíp dopadne do vzdálenosti $r_\mathrm{R} = 65\,\mathrm{m}$. Pod jakým úhlem v kruhové výseči musí mířit, aby se i tentokrát trefil?*

*Jáchym fandil Ramsaymu, ale chtěl, aby příběh dával smysl.*

Nechť $r$ označuje vzdálenost Rickona od Ramsayho. Ze zadání víme, že pro vzdálenost v čase




Obr. 2: Kruhová výseč, ve které se Rickon pohybuje.

$t$ platí $r = r_0 + v_r t$. V tu chvíli bude mít Rickon úhlovou rychlost $\omega$, pro kterou platí $\omega r = v_\varphi$. Vidíme, že úhlová rychlost se stále mění. Chceme-li zjistit celkový úhel, uražený za nějaký čas, musíme použít integrál

$$\varphi = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{v_\varphi}{r_0 + v_r\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{v_\varphi}{v_r}\ln\left(r_0 + v_r\tau\right)\right]_0^t = \frac{v_\varphi}{v_r}\ln\left(1 + \frac{v_r t}{r_0}\right)\,.$$

Celkový úhel, který Rickon urazí do okamžiku, než ho zasáhne šíp, získáme dosazením vzdálenosti $r_\mathrm{R}$ jako

$$\varphi = \frac{v_\varphi}{v_r} \ln \frac{r_\mathrm{R}}{r_0} = 66{,}7^\circ\,.$$

Od tohoto úhlu už jen stačí odečíst $2\alpha$ tolikrát, dokud nedostaneme číslo $\beta' \in \langle 0, 2\alpha)$. Bude-li zároveň platit $\beta' \in \langle 0, \alpha)$, máme výsledek úlohy. Pokud naopak $\beta' \in \langle \alpha, 2\alpha)$, výsledkem bude hodnota $\beta = 2\alpha - \beta'$. Jelikož po dosazení vyjde $\varphi = 66{,}7^\circ$, dostáváme $\beta = 13{,}3^\circ$.

***Jáchym Bártík***
tuaki@fykos.cz

## Úloha FG ... magnetická (skoro)levitace

*Na nevodivé vodorovné rovině leží hmotný bod o hmotnosti $m = 0{,}8\,\mathrm{kg}$ a náboji $q = 3\,\mathrm{C}$. Mezi ním a rovinou je koeficient tření $f = 0{,}4$. Zároveň je zde přítomné vodorovné konstantní homogenní magnetické pole $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$. Jakou maximální vzdálenost může hmotný bod urazit, pokud mu udělíme vodorovnou rychlost $v_0 = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?*

*Jardovi se při cestě do Prahy zdál sen o rychlých vlacích.*

Na hmotný bod bude kromě konstantní tíhové síly působit ještě síla magnetická. Ta je kolmá na vektory indukce a rychlosti, které se nacházejí ve vodorovné rovině, bude proto – stejně jako tíhová síla – působit ve svislém směru.

Aby bod urazil co největší vzdálenost, je nutné, aby byla třecí síla co nejmenší. Proto musí být minimální i normálová síla, což nastane v případě, kdy budou vektory indukce a rychlosti kolmé a magnetická síla bude směřovat vzhůru. Pak platí

$$F_\mathrm{n} = mg - Bvq\,,$$

kde $v$ je velikost okamžité rychlosti. Bod se z podložky vlivem magnetické síly neodlepí, jak se mužeme presvědčit dosazením. Třecí síla způsobuje zpomalování hmotného bodu, napíšeme tedy druhý Newtonův pohybový zákon ve tvaru

$$F = ma = -m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f\left(mg - Bvq\right)\,.$$

Tuto diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných

$$m\frac{\mathrm{d}v}{Bvq - mg} = f\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \ln(Bvq - mg) = \frac{Bqf}{m}t + C_0\,.$$

Úpravou najdeme vztah pro rychlost

$$v = C\mathrm{e}^{\frac{Bqf}{m}t} + \frac{mg}{Bq}\,.$$

Konstantu $C$ určíme z počáteční podmínky, kdy $v = v_0$ v čase $t = 0$. Pak

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{Bq}\right)\mathrm{e}^{\frac{Bqf}{m}t} + \frac{mg}{Bq}\,.$$

Bod se zastaví, když bude rychlost nulová, tedy v čase

$$t_1 = \frac{m}{Bqf} \ln \frac{mg}{(mg - Bqv_0)}\,.$$

Integrací podle času dostáváme dráhu

$$s = \frac{m}{Bqf}\left(v_0 - \frac{mg}{Bq}\right)\mathrm{e}^{\frac{Bqf}{m}t} + \frac{mg}{Bq}t + C_2\,.$$

Konstantu $C_2$ určíme z počáteční podmínky, kdy $s = s_0 = 0$ v čase $t = 0$. Pak

$$s = \frac{m}{Bqf}\left(v_0 - \frac{mg}{Bq}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{Bqf}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{Bq}t\,.$$

Dosazením $t = t_1$ dostáváme uraženou dráhu jako

$$s = \frac{m^2 g}{B^2 q^2 f}\ln\frac{mg}{(mg - Bqv_0)} - \frac{mv_0}{Bqf} = 4{,}76\,\mathrm{m}\,.$$

Pro porovnání uveďme, že bez magnetického pole by hmotný bod urazil pouze něco přes 2 m.

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

## Úloha FH ... třináct panáků

*Uvažujme tři nádoby ve tvaru kvádrů, z nichž první má podstavu o ploše $S_a = 72{,}9\,\mathrm{cm}^2$, druhá $S_b = 94{,}5\,\mathrm{cm}^2$ a třetí $S = 3{,}1\,\mathrm{cm}^2$, přičemž symboly $S_a$, $S_b$ a $S$ pro přehlednost používejme i k označování nádob samotných. Na počátku jsou nádoby $S$ a $S_b$ propojené a voda v nich sahá do výšky $h_b = 8{,}1\,\mathrm{cm}$, zatímco výška hladiny v první nádobě je $h_a = 19{,}3\,\mathrm{cm}$. Následně rozpojíme nádoby $S$ a $S_b$, spojíme $S$ a $S_a$ a počkáme do vyrovnání hladin; nato je opět rozpojíme, spojíme znovu $S$ a $S_b$ a taktéž počkáme, dokud se hladiny nevyrovnají. Proces popsaný v předchozím souvětí provedeme celkem třináctkrát. Jaká bude konečná výška hladiny v nádobě $S$ po posledním opakování?*

*Jáchym nemohl než pokračovat v tradici třináctkových úloh z minulých let.*

Základem řešení této úlohy je vhodné a přehledné označení všech potřebných proměnných. Výšku hladiny v nádobě $S_a$ po $i$-tém kroku budeme značit $x_i$, u druhé nádoby to bude $y_i$. Počáteční hodnoty jsou $x_0 = h_a$ a $y_0 = h_b$.

Po prvním spojení nádob $S$ a $S_a$ bude v obou voda ve výšce $x_1$, zatímco původně to bylo $y_0$ resp. $x_0$. Ze zachování objemu vyplývá

$$(S + S_a)\,x_1 = Sy_0 + S_a x_0\,.$$

Následně spojíme nádoby $S$ a $S_b$, ve kterých jsou hladiny $x_1$ a $y_0$. Po ustálení bude hladina ve výšce $y_1$, přičemž platí

$$(S + S_b)\,y_1 = Sx_1 + S_b y_0\,.$$

Definujeme-li $a = S/S_a$ a $b = S/S_b$, můžeme tyto vztahy zobecnit na

$$x_{i+1} = \frac{x_i + ay_i}{1 + a}\,,$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i + bx_{i+1}}{1 + b}\,,$$

kde si ještě do druhé rovnice dosadíme z první, čímž dostaneme

$$y_{i+1} = \frac{bx_i + (1 + a + ab)\, y_i}{(1 + a)\,(1 + b)}\,.$$

Konstanty pro jednoduchost předefinujeme tak, aby platilo

$$x_{i+1} = \alpha x_i + \beta y_i\,,$$
$$y_{i+1} = \gamma x_i + \delta y_i\,.$$

Čistě pro přehlednost uvedeme transformační vztahy

$$\alpha = \frac{1}{1+a}\,, \qquad \beta = \frac{a}{1+a}\,,$$
$$\gamma = \frac{b}{(1+a)\,(1+b)}\,, \qquad \delta = \frac{1+a+ab}{(1+a)\,(1+b)}\,.$$

Tuto soustavu lze řešit více způsoby. Nejrychlejším z nich je přepis do řeči lineární algebry, můžeme totiž psát

$$\mathbf{x}_{i+1} = A\mathbf{x}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{13} = A^{13}\mathbf{x}_0\,,$$

kde $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ a $A$ je matice z koeficientů $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Dále bychom postupovali tak, že bychom $A$ převedli do diagonálního tvaru, ve kterém je velmi snadné spočítat libovolnou mocninu, a následně bychom ji převedli zpět. Bohužel tento postup nespadá do středoškolské matematiky, takže si ukážeme, jak jej intuitivně odvodit.

Cílem je separovat rovnice tak, aby každá obsahovala pouze jednu proměnnou. Toho docílíme přechodem do proměnných, které tuto vlastnost splňují. Pro konstantu $k$ definujme $z_i = x_i + k y_i$, potom

$$z_{i+1} = x_{i+1} + ky_{i+1} = (\alpha + k\gamma)\, x_i + (\beta + k\delta)\, y_i = (\alpha + k\gamma)\left(x_i + \frac{\beta + k\delta}{\alpha + k\gamma} y_i\right)\,.$$

Jelikož $k$ může být libovolné, zvolme jej tak, aby platilo

$$k = \frac{\beta + k\delta}{\alpha + k\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma k^2 + (\alpha - \delta)\, k - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{\delta - \alpha \pm \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\gamma\beta}}{2\gamma}\,.$$

Tím jsme pro $K = \alpha + k\gamma$ získali rovnici

$$z_{i+1} = (\alpha + k\gamma)\,(x_i + ky_i) = Kz_i\,,$$

která platí hned pro obě možné definice $z$ (podle obou možných hodnot konstanty $k$). Pro přehlednost je rozdělíme do samostatných proměnných $\mu_i$ a $\nu_i$, čímž dostaneme

$$\mu_i = x_i + k_1 y_i \quad \Rightarrow \quad \mu_{i+1} = K_1 \mu_i\,,$$
$$\nu_i = x_i + k_2 y_i \quad \Rightarrow \quad \nu_{i+1} = K_2 \nu_i\,.$$

Všimněme si, že v těchto souřadnicích nedochází k mísení proměnných – $\mu_{i+1}$ závisí pouze na $\mu_i$, nikoli na $\nu_i$. Díky tomu můžeme snadno spočítat hodnotu pro libovolné $i$ jako $\mu_i = K_1^i \mu_0$.

Nyní potřebujeme přejít zpět do souřadnic $x$ a $y$. K tomu stačí vyjádřit $x_i$ a $y_i$ z definičních vztahů pro $\mu_i$ a $\nu_i$. Do výsledku rovnou dosadíme $i = 13$, čímž získáme hladiny po třinácti opakováních

$$x_i = \frac{k_2\mu_i - k_1\nu_i}{k_2 - k_1} \quad \Rightarrow \quad x_{13} = \frac{k_2\mu_{13} - k_1\nu_{13}}{k_2 - k_1} = \frac{k_2K_1^{13}\mu_0 - k_1K_2^{13}\nu_0}{k_2 - k_1}\,,$$

$$y_i = \frac{\mu_i - \nu_i}{k_1 - k_2} \quad \Rightarrow \quad y_{13} = \frac{\mu_{13} - \nu_{13}}{k_1 - k_2} = \frac{K_1^{13}\mu_0 - K_2^{13}\nu_0}{k_1 - k_2}\,.$$

Nás však zajímá pouze výška vody v nádobě $S$, která je zřejmě $h = y_{13}$. Nezbývá, než vzít hodnoty ze zadání, postupně z nich spočítat všechny použité konstanty a nakonec dosadit do vztahu

$$h = \frac{K_1^{13}\left(x_0 + k_1y_0\right) - K_2^{13}\left(x_0 + k_2y_0\right)}{k_1 - k_2} \doteq 11{,}1\,\mathrm{cm}\,.$$

Mohlo by se zdát, že obecné řešení nebude zrovna stručné, ale kupodivu tomu tak není; postupným dosazováním dostaneme

$$k_1 = \frac{a\left(1+b\right)}{b}\,, \qquad K_1 = 1\,,$$

$$k_2 = -1\,, \qquad K_2 = \frac{1}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)}\,.$$

To vede na poměrně jednoduchý výsledek

$$h = \frac{bh_a + a\left(1+b\right)h_b - b\left[\left(1+a\right)\left(1+b\right)\right]^{-13}\left(h_a - h_b\right)}{b + a\left(1+b\right)}\,.$$

***Jáchym Bártík***
`tuaki@fykos.cz`

## Úloha GA ... těžiště lepšího hlemýždě

*Jak daleko od středu souřadného systému se nachází těžiště spirály, která je v polárních souřadnicích zadána jako $r = a\mathrm{e}^{b\varphi}$, kde $a = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $b = 1/\pi$ a $\varphi \in (-\infty, 4\pi)$ označuje úhel v radiánech? Spirála má konstantní délkovou hustotu $\lambda$.* *Lego má raději logaritmickou spirálu.*

V kartézskej sústave budú súradnice bodu na špirále

$$x = a\mathrm{e}^{b\varphi}\cos\varphi\,,$$

$$y = a\mathrm{e}^{b\varphi}\sin\varphi\,.$$

Pre výpočet dĺžky elementu zodpovedajúceho zmene uhla o $\mathrm{d}\varphi$ použijeme Pytagorovu vetu

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = a\mathrm{e}^{b\varphi}\sqrt{\left(b\cos\varphi - \sin\varphi\right)^2 + \left(b\sin\varphi + \cos\varphi\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi = a\mathrm{e}^{b\varphi}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Hmotnosť špirály bude

$$M = \int_{-\infty}^{4\pi}\lambda a\mathrm{e}^{b\varphi}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{d}\varphi = \lambda\frac{a}{b}\mathrm{e}^4\sqrt{1+b^2}\,.$$

Súradnice ťažiska potom dostaneme priamo z definície ako

$$x_T = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,\mathrm{d}l = \frac{1}{M}a^2\lambda\sqrt{1+b^2}\int_{-\infty}^{4\pi} \mathrm{e}^{2b\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{e}^{-4}ba\int_{-\infty}^{4\pi} \mathrm{e}^{2b\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$y_T = \mathrm{e}^{-4}ba\int_{-\infty}^{4\pi} \mathrm{e}^{2b\varphi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Integrály môžeme spočítať buď numericky, dvojitým per partes, alebo použitím komplexných exponenciál. Každopádne dostaneme

$$x_T = \mathrm{e}^{-4}ba\left[\mathrm{e}^{2b\varphi}\frac{2b\cos\varphi+\sin\varphi}{4b^2+1}\right]_{-\infty}^{4\pi} = \frac{2\mathrm{e}^4 b^2 a}{4b^2+1} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m}\,,$$

$$y_T = \mathrm{e}^{-4}ba\left[\mathrm{e}^{2b\varphi}\frac{2b\sin\varphi-\cos\varphi}{4b^2+1}\right]_{-\infty}^{4\pi} = \frac{-\mathrm{e}^4 ba}{4b^2+1} \doteq -1{,}24\,\mathrm{m}\,.$$

Zaujímala nás vzdialenosť od počiatku súradnej sústavy. Pre jej výpočet opäť využijeme Pytagorovu vetu, z ktorej dostávame $\sqrt{x_T^2+y_T^2} \doteq 1{,}5\,\mathrm{m}$.

***Šimon Pajger***
`legolas@fykos.cz`

## Úloha GB ... padající strom

*Jáchym pokácel strom, který můžeme aproximovat tenkým homogenním válcem o výšce* 11 m. *Strom je ještě částečně spojený s pařezem, takže jeho vrchol během pádu opisuje část kružnice. Za jak dlouho od okamžiku, kdy strom překoná výchylku* $1^\circ$, *dopadne jeho vrchol na zem?*

*Jáchym hází řešitelům klacky pod nohy.*

Vyjdeme ze zákona zachování energie. Na počátku má strom o délce $l$ těžiště ve výšce $\frac{l}{2}$, jeho potenciální energie je proto

$$E_{\mathrm{p}0} = mg\frac{l}{2}\,.$$

Nyní označme jako $\varphi$ úhel odklonu stromu od svislé přímky v průběhu jeho pádu. Potenciální energie stromu v poloze určené konkrétním úhlem má tedy hodnotu

$$E_\mathrm{p} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi\,.$$

Ze zákona zachování energie najdeme jeho úhlovou rychlost. Strom aproximujeme tenkou homogenní tyčí, která má vůči ose procházející jejím koncem moment setrvačnosti $J = \frac{1}{3}ml^2$. Kinetickou energii tak lze spočíst podle vztahu

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = E_{\mathrm{p}0} - E_\mathrm{p} = mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\varphi\right)\,,$$

kde $\omega = \dot{\varphi}$ je úhlová rychlost pohybu stromu.

Vyjádření úhlové rychlosti se nám hodí, platí totiž

$$\omega\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\omega}\,.$$

Pokud zapíšeme úhlovou rychlost $\omega$ jako funkci úhlu $\varphi$, pak integrací této rovnice získáme vztah pro určení doby pádu v závislosti na $\varphi$

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\omega}\,,$$

kde $\varphi_0$ a $\varphi_1$ jsou počáteční a koncový úhel, mezi kterými měříme čas. Po dosazení za $\omega$ ze zákona zachování energie dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{l}{3g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}}\,.$$

Zkusme spočítat tento integrál; nejprve jako neurčitý, při jehož řešení se nemusíme zabývat mezemi.

Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli, vyzkoušíme substituci $\frac{\varphi}{2} = \psi$. Dostáváme

$$2\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-\cos 2\psi}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-\cos^2\psi+\sin^2\psi}} = \sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}\psi}{\sin\psi}\,.$$

Zkusme úhel znovu rozdělit na poloviny, tj. položme $\theta = \frac{\psi}{2}$. Pak

$$\sqrt{2}\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,.$$

Získali jsme součin sinu a cosinu integrované proměnné. Použijme pro tento případ standardní substituci $u = \operatorname{tg}\theta$ a

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,,$$

odkud

$$\sqrt{2}\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Konečně jsme dospěli k výrazu, který dokážeme jednoduše integrovat. Dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} = \sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \sqrt{2}\ln u + C = \sqrt{2}\ln\operatorname{tg}\theta + C = \sqrt{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} + C = \sqrt{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + C\,.$$

Pád stromu z výchylky $1^\circ$ do vodorovné polohy tak trvá

$$t = \sqrt{\frac{2l}{3g}}\left[\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}\right]_{1^\circ}^{90^\circ} \doteq 6{,}44\sqrt{\frac{l}{3g}} = 3{,}9\,\mathrm{s}\,.$$

***Jaroslav Herman***
`jardah@fykos.cz`

***FYKOS***
***UK, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
***https://www.facebook.com/FYKOS***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.