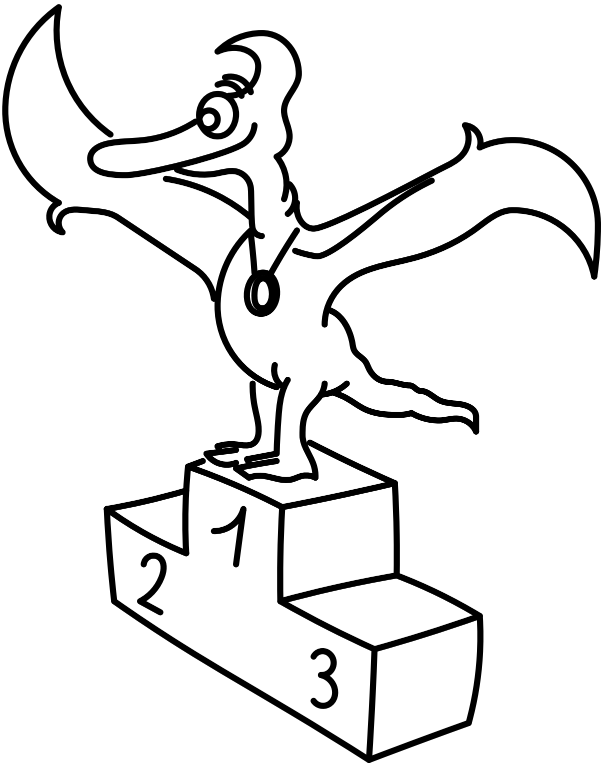
Řešení úloh

fyziklani2020



Úloha AA ... vychlazená limonáda

Pták Fykosák si chtěl vychladit láhev limonády Bohemsca, a tak jí ponořil do studny. Jaký objem limonády by musel předtím vypít, aby láhev plovala? Celkový objem láhve s limonádou je $0{,}420\,\mathrm{l}$*, přičemž dovnitř se vejde objem* $0{,}336\,\mathrm{l}$*. Objem limonády najdete napsaný na lahvi. Hustota skla je* $2{,}5$ *krát větší, než hustota vody.* *Jáchym při kopání studny dostal žízeň.*

Označme veličiny ze zadání po řadě V_c, V_v a $V_\mathrm{l} = 330\,\mathrm{ml}$ a $k = \varrho_\mathrm{s}/\varrho_\mathrm{v} = 2{,}5$. Láhev bude plovat tehdy, pokud bude mít stejnou celkovou hustotu, jako voda. Hustota samotné limonády je téměř stejná jako hustota vody, takže se stačí zabývat pouze zbytkem lahve. Ten je tvořen stěnami a vzduchem v lahvi, jeho objem tak bude

$$V = V_\mathrm{s} + V_\mathrm{v} - (V_\mathrm{l} - \Delta V) \,,$$

kde V_s je objem stěn a ΔV je objem limonády, kterou Fykosák vypije. Hmotnost vzduchu můžeme zanedbat, takže nám zbyde pouze hmotnost stěn $m = m_\mathrm{s} = V_\mathrm{s}\varrho_\mathrm{s}$. Pro plování dostáváme podmínku

$$\varrho_\mathrm{v} = \frac{m}{V} = \frac{V_\mathrm{s}\varrho_\mathrm{s}}{V_\mathrm{s} + V_\mathrm{v} - (V_\mathrm{l} - \Delta V)} \,.$$

Nakonec dosadíme za objem stěn z veličin ze zadání $V_\mathrm{s} = V_\mathrm{c} - V_\mathrm{v}$ a vyjádříme hledaný objem vypité limonády

$$\Delta V = k\,(V_\mathrm{c} - V_\mathrm{v}) + V_\mathrm{l} - V_\mathrm{c} = 120\,\mathrm{ml}\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha AB ... lanovitá

Nové lano má délku $l_0 = 60{,}0\,\mathrm{m}$ *a průměr* $d_0 = 9{,}40\,\mathrm{mm}$*. Používáním se jeho průměr zvětšil na* $d = 10{,}10\,\mathrm{mm}$*. O kolik se lano zkrátilo, jestliže předpokládáme, že jeho objem se nezměnil?* *Dodo má nové lano.*

Pre objem lana máme zo vzťahu pre objem valca

$$V = \frac{\pi l_0 d_0^2}{4} = \frac{\pi l d^2}{4} \,,$$

kde l je dĺžka lana po používaní. Ostáva vyjadriť túto novú dĺžku a určiť rozdiel

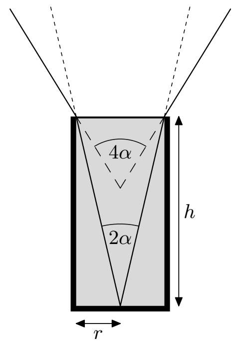
$$\Delta l = l - l_0 = \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 l_0 - l_0 = \frac{d_0^2 - d^2}{d^2} l_0 \,.$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame, že lano sa skrátilo o $8{,}0\,\mathrm{m}$, čo je prekvapivo veľa.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha AC ... na dně

Dano má studnu s konstantním kruhovým průřezem a s hloubkou h, ale nemá v ní žádnou vodu. Když se až z úplného dna podívá na oblohu, uvidí z ní úhel $2\alpha \leq 90^\circ$. Tento úhel chceme zvětšit tím, že do studny nalijeme specifickou kapalinu (přičemž Dano stále zůstane na dně). Jaká je obecná podmínka pro index lomu, který daná kapalina musí mít, abychom úhel, který Dano z oblohy vidí, dokázali zvětšit na dvojnásobek? *Jáchym nevěděl, jak to začalo...*



Maximálního zvětšení úhlu dosáhneme tehdy, když studnu zcela naplníme kapalinou. Zlomený paprsek s úhlem 2α se potom v kapalině vydá po stejné cestě, kudy by šel původní paprsek s úhlem α ve vzduchu. Označíme-li index lomu kapaliny n, ze Snellova zákona vyplývá

$$\sin 2\alpha = n \sin \alpha \,.$$

Levou stranu si napíšeme jako $2 \sin \alpha \cos \alpha$ a dostáváme

$$n = 2 \cos \alpha \,.$$

Toto je mezní případ, čili nám bude stačit i větší hodnota indexu lomu

$$n \geq 2 \cos \alpha \,.$$

Všimněme si, že výsledek vůbec nezávisí na rozměrech studny.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha AD ... sníh na střeše

Na šikmé střeše o sklonu $\alpha = 55^\circ$ se nachází vrstva sněhu o výšce $h = 20\,\mathrm{cm}$ (ve svislém směru). Sníh má hustotu $\varrho = 0{,}80\,\mathrm{kg{\cdot}dm^{-3}}$ a střecha má rozměry $30\,\mathrm{m} \times 6\,\mathrm{m}$ (z pohledu ve směru kolmém na střechu). Určete, jakým tlakem působí sníh na střešní krytinu.

Dodo se sprchoval.

Celková hmotnosť snehu na streche je

$$m = Sh\varrho \cos \alpha \,.$$

Tlak je definovaný ako podiel normálovej sily F_n k ploche o veľkosti S

$$p = \frac{F_\mathrm{n}}{S} = \frac{mg \cos \alpha}{S} = h\varrho g \cos^2 \alpha \doteq 520\,\mathrm{Pa}\,.$$

Na strechu pôsobí sneh tlakom $p = 520\,\mathrm{Pa}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha AE ... Dančiny brýle

Danka dokáže volným okem zaostřit maximálně na vzdálenost 20 cm. *Jaké brýle Danka potřebuje, aby viděla normálně (tedy, aby se její daleký bod nacházel ve správné vzdálenosti před okem)? Napište typ čoček a jejich optickou mohutnost.* *Danka nic neviděla.*

Použijeme zobrazovaciu rovnicu

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,.$$

Danka potrebuje, aby okuliare zobrazili ďaleký bod (teda bod z nekonečna) vo vzdialenosti a pred okom do vzdialenosti $a' = 20\,\mathrm{cm}$ pred oko, kam Danka ešte dokáže zaostriť. V našej konvencii, optická mohutnosť $\Phi = -\frac{1}{f}$, teda dostávame $\Phi = -5\,\mathrm{D}$. Danka teda potrebuje rozptylky s optickou mohutnosťou $-5\,\mathrm{D}$.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha AF ... interdimenzionální potenciál

Představte si planetu, která má na rovníku stejné gravitační zrychlení jako na Zemi (uvažujte $a_\mathrm{g} = 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*). Stejně tak i odstředivé zrychlení (uvažujte* $a_\mathrm{o} = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$*), ale přitom má daná planeta poloměr pouze* $R = 5{,}00\,\mathrm{km}$. *Jaký by byl rozdíl mezi gravitační potenciální energií malé družice na povrchu planety a v případě, že by se dostala do nekonečné vzdálenosti? Výsledek uveďte v absolutní hotnotě na kilogram hmotnosti družice.*

Předpokládejte, že planeta je dokonale kulatá a homogenní.

Karel se díval na to, kam utekla rodina Ricka a Mortyho.

Potenciální energie gravitačního pole hmotného bodu (stejná jako koule) se stanovuje tak, že je nulová v nekonečné vzdálenosti od daného bodu. Tedy v obou případech bude potenciální energie v nekonečnu nulová. Případně by mohla být posunutá o nějakou konstantu, která ovšem nehraje roli pro fyzikální situaci, tedy pohyby v rámci tohoto pole.

Podívejme se na potenciální energii v konečné vzdálenosti, nejprve pro naši smyšlenou planetu

$$E_{p1} = -G\frac{mM}{R}\,.$$

Respektive, měli bychom se spíše podívat na gravitační potenciál, ve kterém nebude vystupovat hmotnost dané družice. Zadání hovoří právě o energii na jednotkovou hmotnost, což je právě gravitační potenciál.

$$U_1 = \frac{E_{p1}}{m} = -\frac{GM}{R} = -a_g R \doteq -49\,150\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Pro porovnání lze potenciál srovnat s gravitačním potenciálem na Zemi. Pro Zemi s poloměrem $R_\mathrm{Z} = 6\,380\,\mathrm{km}$ dostáváme

$$U_2 = -a_g R_\mathrm{Z} \doteq 6{,}3 \cdot 10^7\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Z těchto výsledků vidíme, že v případě, že na povrchu homogenních planet je stejné gravitační zrychlení, bude výhodnější pro mezihvězdné cestování ta planeta, která má menší poloměr. Je na ní pak potřeba menší energie pro start rakety. Naopak je pro obyvatele planety praktičtější, pokud jsou na větší planetě, protože zažívají menší slapové síly. Nicméně vzhledem k tomu, jak vysoká nám vyšla hustota takové planety v úloze na Fyziklání online, tak je nepravděpodobné, že by taková planeta mohla existovat – buď by měla menší hustotu, podobnou látkám na Zemi, nebo naopak může být s podobnými rozměry neutronová hvězda, která má daleko vyšší hustotu, na povrchu daleko větší gravitační zrychlení a současně by skoro jistě daleko rychleji rotovala.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AG ... kofein

Daniel si hlídá svůj příjem kofeinu. Běžný šálek kávy má v sobě přibližně 80,0 mg *kofeinu. Daniel si ve své moka konvičce vaří kávu, jejíž jeden šálek o objemu* 1,00 dl *má obsah kofeinu tří běžných šálků kávy. FYKOS objednal nové rovnostranné válcové plecháčky – tedy takové, že výška je stejná jako průměr podstavy, který je* 8 cm*. Kolik mg kofeinu do sebe Daniel kopne, když si zaplní svůj nový plecháček kávou ze své konvičky?* *Daniel pije příliš moc kávy.*

Ak má 1 dl kávy z Danovej moka konvička trojnásobný obsah kofeínu ako bežná šálka kávy, obsahuje 240 mg kofeínu. Objem valcového plecháčika spočítame jednoducho podľa vzorca pre objem valca

$$V = \frac{1}{4}\pi d^3 \doteq 402\,\mathrm{cm}^3 = 4{,}02\,\mathrm{dl}\,.$$

Na záver z priamej úmery dostávame, že v plecháčiku bude 965 mg kofeínu.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha AH ... nedokonalý voltmetr

Máme rezistor s odporem R. Paralelně k němu připojíme voltmetr a k nim do série ampérmetr. Toto zapojení připojíme ke zdroji stejnosměrného napětí. Ampérmetr ukáže proud I, voltmetr napětí U (přičemž $U \neq RI$). Určete vnitřní odpor voltmetru.
Legolas měřil v praktiku odpory.

Voltmeter je pripojený paralelne k rezistoru, U je teda skutočne napätie na rezistore. Tým teda zrejme tečie prúd

$$I_\mathrm{r} = \frac{U}{R}\,.$$

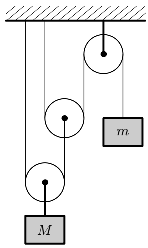
Lenže ampérmeter je zapojený do série k paralelnému zapojeniu rezistora a voltmetra, teda ním tečie súčet prúdov týmito dvomi súčiastkami $I = I_\mathrm{r} + I_\mathrm{v}$.

Zostáva si uvedomiť, že napätie, ktoré voltmeter ukazuje, je zároveň napätie, ktoré je na jeho svorkách. Z podielu týchto dvoch veličín už dopočítame jeho odpor

$$R_\mathrm{v} = \frac{U_\mathrm{v}}{I_\mathrm{v}} = \frac{U}{I - I_\mathrm{r}} = \frac{U}{I - \frac{U}{R}} = \frac{UR}{IR - U} = \left(\frac{I}{U} - \frac{1}{R}\right)^{-1}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha BA ... zase kladky



Jakým zrychlením bude zrychlovat těleso s hmotností M směrem dolů? Všechny kladky i lana jsou nehmotné.

Lego si všiml, že vám na FOLe nějak nešly kladky...

Označíme si pnutie v lane, na ktorom visí m, ako T. Potom (keďže kladky sú nehmotné a výsledná sila, čo na ne pôsobí, musí byť preto nutne nulová) na druhú kladku zľava pôsobí sila $2T$ smerom nahor. Kompenzovať to musí druhé lano, v ktorom teda musí byť pnutie $2T$.

Napíšme si pohybové rovnice pre obe závažia

$$Ma_M = Mg - 4T\,,$$
$$ma_m = mg - T\,,$$

kde obe zrýchlenia sú myslené smerom dole.

To sú 2 rovnice a 3 neznáme (zrýchlenia a T), zostáva nájsť vzťah medzi zrýchleniami. Už z toho, že na M pôsobí 4-krát väčšia sila od lana, sa dá odhadnúť, že bude zrýchľovať 4-krát pomalšie.

Geometricky sa to dá ľahko overiť tým, že keď posunieme M o nejaké x nadol, dokopy to potiahne druhú kladku o $2x$ nadol, čo potom potiahne m o $4x$ nahor. Zrýchlenie m je teda 4-krát väčšie a v opačnom smere ako zrýchlenie M, rečou matematiky $a_m = -4a_M$.

Dosadíme tento vzťah do našej sústavy a máme

$$Ma_M = Mg - 4T\,,$$
$$-4ma_M = mg - T\,.$$

Vynásobíme 2. rovnicu -4 a sčítame

$$Ma_M + 16ma_M = Mg - 4mg\,,$$
$$a_M = g\frac{M - 4m}{M + 16m}\,.$$

Pre $M > 4m$ bude teleso s hmotnosťou M zrýchľovať nadol.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BB ... plnou nádrž, prosím

Matějovi ve studni začala docházet voda, tak ji tam začal dopouštět proudem vody s konstantním hmotnostním průtokem q. Přitom si všimnul, že těsně nad hladinou (která je v hloubce $h = 37\,\mathrm{m}$) má proud vody třináctkrát menší obsah průřezu. Jaká je rychlost vody v proudu u horního okraje studny? Zanedbejte povrchové napětí. *Jáchym má rád netradiční studny.*

Označme dolní obsah průřezu S, potom horní obsah je $S_0 = kS$, kde $k = 13$. Rychlost vody dole a nahoře označíme v a v_0. Hmotnostní průtok se musí zachovat podél celého proudu, čili

$$vS = v_0S_0\,.$$

Z této podmínky plyne $v = kv_0$. Nyní si napíšeme pohybové rovnice

$$v = v_0 + gt\,,$$
$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Z prvního vztahu si vyjádříme čas

$$t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{(k-1)\,v_0}{g}\,,$$

který rovnou dosadíme do druhého

$$h = v_0 \frac{(k-1)\,v_0}{g} + \frac{1}{2} g \frac{(k-1)^2\,v_0^2}{g^2}\,.$$

Můžeme psát výsledek

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{k^2-1}} \doteq 2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha BC ... upuštěná

Štěpán do studny pustil velmi těžkou dělovou kouli. Po uplynutí času 3,69 s *uslyšel hlasité „žbluňk“. Jak hluboko ve studni je hladina vody? Neuvažujte odpor vzduchu, ale uvažujte rychlost zvuku.* *Jáchym měl radost z 10/10.*

Označme písmenem h hloubku, ve které se nachází hladina vody. Dělová koule k ní padá čas

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Cesta zvukového signálu zpět ke Štěpánovi trvá

$$t_2 = \frac{h}{c}\,,$$

kde c je rychlost zvuku ve vzduchu. Zřejmě platí $t_1 + t_2 = t$, z čehož si můžeme vyjádřit hledanou hloubku

$$0 = h^2 g - 2hc\,(tg + c) + t^2 c^2 g\,,$$
$$h = \frac{c}{g}\left((tg + c) \pm \sqrt{2tgc + c^2}\right)$$

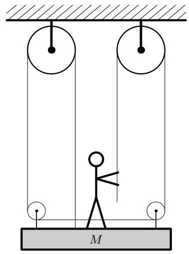
Fyzikální smysl má kořen s $-$, pro který vychází $h \doteq 60{,}4\,\mathrm{m}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha BD ... fytahujeme

Fykosák o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$ tahá za lano konstantní silou $F = 300\,\mathrm{N}$ směrem dolů. Spočítejte velikost jeho zrychlení. Hmotnost plošinky na obrázku je $M = 50\,\mathrm{kg}$. Zanedbejte momenty setrvačnosti všech kladek.

Matěj rád kopá díry.



Budeme uvažovat jednodušší situaci – že fykosák s plošinkou tvoří jedno pevné těleso. Níže odůvodníme, proč to platí. Mezi tímto tělesem a stropem vede lano celkem čtyřikrát. Vlastností každého lana v systému dokonalých kladek je, že je v každém bodě napínáno stejnou silou. Celková síla, která na Fykosáka s plošinkou působí, je $4F$. Dále na soustavu působí tíhová síla $F_g = (M + m)\,g$. Použijeme standardní vzoreček pro zrychlení

$$a = \frac{4F - F_g}{M + m} = \frac{4F}{M + m} - g = 2{,}19\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Fykosáka s plošinkou jsme mohli považovat za jedno těleso, protože na Fykosáka působí směrem vzhůru kromě plošinky už jen lano, a to silou $F < mg$. Pokud by jej tedy plošinka nenadzvedávala, začal by padat dolů.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha BE ... jak pohnout světem

Lego chtěl hnout světem, tak seskočil ze stromu, přičemž se jeho těžiště posunulo o h vzhledem k Zemi. O kolik se vzhledem k soustavě spojené se společným těžištěm Země a Lega hnula Země? Lego má hmotnost m, Země M. Předpokládejte, že poloměr Země $R_\mathrm{Z} \gg h$. O hmotnosti Země a Lega nepředpokládejte nic.

Lego chtěl hnout světem.

Keďže $R_\mathrm{Z} \gg h$, na Legolasa (Lega) aj na Zem bude počas celého pádu pôsobiť rovnako veľká sila F. Legolas teda bude zrýchľovať so zrýchlením $a_\mathrm{L} = F/m$ smerom k Zemi a Zem zas s $a_\mathrm{Z} = F/M$ smerom k Legolasovi. Ich výsledné vzájomné zrýchlenie teda bude

$$a_\mathrm{v} = a_\mathrm{L} + a_\mathrm{Z} = F\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) = F\frac{m + M}{mM}\,.$$

Dobu pádu si vieme spočítať z dráhy rovnomerne zrýchleného pohybu ako

$$h = \frac{1}{2}a_\mathrm{v}t^2\,,$$
$$t^2 = 2\frac{h}{a_v}\,.$$

Tento čas zostáva dosadiť do vzorca pre rovnomerne zrýchlený pohyb Zeme

$$s = \frac{1}{2}a_\mathrm{Z}t^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{M}2\frac{h}{F\frac{m+M}{mM}} = h\frac{m}{m + M}\,.$$

Riešenie vieme nájsť však aj jednoduchšie. Stačí totiž určiť vzdialenosť Zeme od ťažiska sústavy x ako funkciu vzdialenosti ťažísk Lega a Zeme d. Polohu ťažiska určíme z rovnosti momentov síl

$$xM = (d - x)\, m\,,$$
$$x = \frac{dm}{M + m}\,.$$

Pri zoskoku sa vzdialenosť ťažísk d zmenila o h, teda Zem sa voči ťažisku posunula o $\Delta x = \frac{hm}{M+m}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha BF ... bublinka v moři

Na dně moře v hloubce $h_1 = 130\,\mathrm{m}$ pod hladinou potápěč vypustí vzduchovou bublinu s teplotou $t_1 = 36\,^\circ\mathrm{C}$ a poloměrem $r_1 = 0{,}50\,\mathrm{cm}$. Bublina stoupá k hladině, přičemž se cestou nedělí na menší bubliny a zachovává si tvar. Jaký bude poloměr bubliny v hloubce $h_2 = 5\,\mathrm{m}$ pod hladinou? Při stoupání bubliny k hladině nestihne dojít k tepelné výměně mezi vzduchem v bublině a mořem. Hustota mořské vody je $\varrho = 1\,020\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, atmosferický tlak je $p_\mathrm{a} = 1\,013\,\mathrm{hPa}$.

Danka se chce jít potápět.

Bublina má guľový tvar, jej objem teda závisí na polomere ako $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Keďže pri stúpaní nedochádza k tepelnej výmene s morom, ide o adiabatický dej. Platí teda $pV^\kappa = \mathrm{konst}$, kde $\kappa = 1{,}4$ je Poissonova konštanta pre vzduch. Potom pre objem V_2 dostaneme

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\,.$$

Pod hladinou na bublinu pôsobí hydrostatický tlak $p = h\varrho g$, pričom celkový tlak je súčet hydrostatického a atmosferického. Potom máme

$$\frac{4}{3}\pi r_2^3 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{4}{3}\pi r_1^3\,,$$

odkiaľ vyjadríme r_2

$$r_2 = r_1 \left(\frac{h_1\varrho g + p_\mathrm{a}}{h_2\varrho g + p_\mathrm{a}}\right)^{\frac{1}{3\kappa}} \doteq 0{,}85\,\mathrm{cm}\,.$$

Bublina má v hĺbke $5\,\mathrm{m}$ pod hladinou polomer $0{,}85\,\mathrm{cm}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha BG ... duálně dioptrická

Máme tenkou čočku z flintového skla a vyrobili jsme ji tak, aby měla optickou mohutnost právě $\varphi = 1{,}000\,\mathrm{D}$ pro červené světlo. Bohužel flintové sklo má tu nevýhodu, že má relativně vysokou disperzi. Jakou optickou mohutnost má čočka pro modré světlo? Index lomu naší čočky je pro červené světlo $n_\mathrm{r} = 1{,}628$ a pro modré světlo pak $n_\mathrm{b} = 1{,}647$.

Karel se zamýšlel nad barevnou vadou.

Optickou mohutnost tenké čočky spočítáme jako

$$\varphi = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\,k\,,$$

kde do konstanty k jsme schovali rozdíl převrácených hodnot poloměrů křivosti R_1 a R_2, protože ten se při disperzi nemění. Zřejmě tak platí

$$\frac{\varphi_\mathrm{r}}{n_\mathrm{r}-1} = \frac{\varphi_\mathrm{b}}{n_\mathrm{b}-1}\,,$$

odkud si již snadno vyjádříme hledanou optickou mohutnost pro modré světlo

$$\varphi_\mathrm{b} = \frac{n_\mathrm{b}-1}{n_\mathrm{r}-1}\varphi_\mathrm{r} = 1{,}030\,.$$

Pro tlustou čočku by tento postup nefungoval, index lomu by měl totiž vliv na posun paprsku při průchodu čočkou.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha BH ... molekulový rotátor

Dvouatomová molekula kyslíku o celkové hmotnosti $m = 5{,}30\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ rotuje kolem svého těžiště. Vazba mezi atomy je elastická s tuhostí $k = 180\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. O jakou část klidové délky vazby $l = 1{,}21\,\mathrm{A}$ se vazba prodlouží, když bude molekula rotovat úhlovou rychlostí $\omega = 6{,}00\cdot 10^{12}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$? Uvažujte, že hmotnosti jednotlivých atomů jsou soustředeny na koncích vazby.

Danka vzpomíná na zkoušku z Fyziky 4.

Pri rotácii molekuly budú v rovnováhe elastická sila F_p a odstredivá sila F_o, pre ktoré platí postupne

$$F_\mathrm{p} = k\Delta l\,,$$
$$F_\mathrm{o} = \frac{m}{2}\omega^2\frac{l+\Delta l}{2}\,.$$

Z ich rovnosti vyjadríme hľadaný pomer

$$\frac{\Delta l}{l} = \left(\frac{4k}{m\omega^2} - 1\right)^{-1} \doteq 2{,}66\cdot 10^{-3}\,.$$

Teda väzba sa predĺži asi o $2{,}66\cdot 10^{-3}$ pokojovej dĺžky.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha CA ... nebezpečí ve třídě

Daniel si během hodin společenských věd všiml, že většina neonových lamp ve třídě je dost stará. Takovéto neonky jsou většinou dlouhé $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a jsou pevně uchycené na obou koncích. Občas se stane, že jeden úchyt se uvolní a neonka se okolo druhého může volně otáčet. Jaká bude rychlost uvolněného konce neonky v nejnižším bodě jejího pohybu, pokud nebudeme uvažovat odporové síly? *Daniel se zamýšlí, jak moc je pobyt ve škole nebezpečný.*

Najjednoduchšie príklad spočítame cez energie. Uvažujme, že tyč zavesená na oboch koncoch má nulovú potenciálnu energiu. Keď padá, jej ťažisko sa posúva nižšie, pričom sa potenciálna energia premieňa na kinetickú energiu rotačného pohybu

$$-\Delta E_p = \Delta E_k\,,$$

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2\,,$$

kde m je hmotnosť neónky, $I = \frac{1}{3}ml^2$ je moment zotrvačnosti tyče (ktorou aproximujeme neónku) otáčajúcej sa okolo jedného konca a ω uhlová rýchlosť neónky prechádzajúcej dolnou polohou. Z toho môžeme vyjadriť uhlovú rýchlosť ako

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}\,.$$

Rýchlosť konca tyče spočítame z uhlovej rýchlosti ako $v = \omega l = \sqrt{3gl}$. Po dosadení číslených hodnôt dostávame $v \doteq 6{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Príklad možno počítať aj cez sily, uvažujúc tiažovú silu pôsobiacu v ťažisku v polovici tyče zvislo nadol. Integráciou podľa uhla, ktorý zviera rameno sily a tiažová sila, dostaneme výsledok ako vyššie.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha CB ... něco si přejte

Danka má studnu s konstantním kruhovým průřezem, která plní přání. Představila si zdánlivě nekonečné slunné pláže jižního Pacifiku a hodila do studně minci, která se během pádu několikrát dokonale pružně odrazila od okrajů. Výškový rozdíl mezi prvním a druhým odrazem byl $d_1 = 14{,}6\,\mathrm{m}$ a mezi druhým a třetím byl $d_2 = 23{,}7\,\mathrm{m}$. Ještě než se mince znovu odrazila, Danka už věděla výškový rozdíl mezi třetím a čtvrtým odrazem. Kolik to bude? Minci aproximujte hmotným bodem. *Jáchym se už těší na prázdniny.*

Mince má vodorovnou složku rychlosti v_x, jejíž velikost je konstantní. Vodorovná dráha je také stále stejná (tento fakt vyplývá přímo ze zákona odrazu a toho, že studna je kruhová), takže mezi každým odrazem uplyne čas T. Nechť první nastane v čase $t = 0$ v hloubce $h = 0$, přičemž mince má v tu chvíli svislou rychlost $v = v_0$. Můžeme psát pohybové rovnice pro jednotlivé odrazy

$$h_i = v_0 t_i + \frac{1}{2}g t_i^2\,,$$

kde $t_i = iT$. Hledaný rozdíl označíme d_3, potom pro dané hloubky platí

$$h_i = \sum_{j=1}^{i} d_j\,.$$

Z první rovnice si vyjádříme počáteční rychlost

$$Tv_0 = d_1 - \frac{1}{2}gT^2\,,$$

kterou dosadíme do druhé rovnice, čímž získáme čas mezi odrazy

$$gT^2 = d_2 - d_1\,.$$

Dosazením do třetího vztahu dostaneme hledanou vzdálenost

$$d_3 = 3v_0T + \frac{9}{2}gT^2 - d_1 - d_2 = 2d_2 - d_1 = 32{,}8\,\mathrm{m}\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha CC ... padá štětec

Určete čas t, za který spadne na zem štětec, který vypadl člověku sedícímu na hřebeni střechy. Výška střechy je h, sklon střechy α a koeficient smykového tření mezi štětcem a střechou je f. Předpokládejte nulovou počáteční rychlost a střechu sahající až na zem. Určete i podmínku, aby štětec dopadl na zem. *Dodo natíral střechu.*

V smere pohybu rovnobežne s rovinou strechy pôsobí na štetec s hmotnosťou m zložka tiažovej sily o veľkosti

$$F = mg\sin\alpha\,.$$

Proti pohybu pôsobí trecia sila o veľkosti

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n} = fmg\cos\alpha\,.$$

Zo zákona sily dostávame zrýchlenie štetca ako

$$a = \frac{F - F_\mathrm{t}}{m} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha\,,$$

kde je nutné, aby platilo $f < \operatorname{tg}\alpha$, aby trenie štetec nezastavilo. Ak upravíme vzťah pre rovnomerne zrýchlený pohyb

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

pre $s = h/\sin\alpha$ a vyjadríme čas, dostávame po dosadení zrýchlenia

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\sin\alpha}}\,.$$

Pre zaujímavosť, ak za $\sqrt{2h/g} = T$ dosadíme čas voľného pádu zo strechy, dostávame

$$t = \frac{T}{\sqrt{\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)\sin\alpha}}\,,$$

teda vzťah závislý na koeficiente trenia a strmosti strechy. Vidíme, že pre $\alpha = 90^\circ$ ide o voľný pád a pre menej strmé strechy sa pád spomaľuje.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha CD ... sprintujeme na vozíku

Představme si, že sedíme na elektrickém vozíku na atletickém ovále o délce $l = 400{,}0\,\mathrm{m}$. Najděte najkratší možný čas, za který dokážeme ovál přejet dokola tak, aby na nás během celého pohybu nepůsobilo setrvačné zrychlení o velikosti větší jako $a = 0{,}1g$. Okruh začínáme v zatáčce s nenulovou rychlostí (kterou také optimalizujeme), obě rovinky a obě zatáčky mají délku $l/4$.

Dodo a sprint...

Odstredivé zrýchlenie v zákrute dáva maximálnu možnú rýchlosť v_0, ktorou môžeme v zákrute ísť. Polomer zákruty určíme z dĺžky oblúka ako $r = \frac{l}{4\pi}$. Z toho určíme čas prejazdu zákruty T_z postupne ako

$$
\begin{aligned}
a = 0,1g = \frac{v_0^2}{r} &= \frac{v_0^2 4\pi}{l}\,,\\
v_0 &= \sqrt{\frac{lg}{40\pi}}\,,\\
T_\mathrm{z} = \frac{l}{4v_0} &= \sqrt{\frac{5\pi l}{2g}}\,.
\end{aligned}
$$

Následne vozík polovicu rovinky zrýchľuje a polovicu rovinky brzdí maximálnym možným zrýchlením $a = g/10$. Všetky štyri polrovinky, každá o dĺžke $l/8$, teda prejde za rovnaký čas T_p. Pre rovnomerne zrýchlený pohyb máme

$$
\frac{l}{8} = v_0 T_\mathrm{p} + \frac{1}{2} a T_\mathrm{p}^2 = \sqrt{\frac{lg}{40\pi}} T_\mathrm{p} + \frac{1}{20} g T_\mathrm{p}^2\,.
$$

Z tohto vzťahu musíme vyjadriť čas. Z riešenia kvadratickej rovnice nás zaujíma riešenie pre kladný čas

$$
T_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{5}{2\pi}}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sqrt{1+\pi} - 1\right)\,.
$$

Celkový čas teda dostaneme ako

$$
T = 2T_\mathrm{z} + 4T_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(2\sqrt{\frac{5\pi}{2}} + 4\sqrt{\frac{5}{2\pi}}\left(\sqrt{1+\pi} - 1\right)\right) \approx 9{,}30\sqrt{\frac{l}{g}}\,.
$$

Po číselnom dosadení dostávame čas $T = 59\,\mathrm{s}$, čo je pomalšie ako svetový rekord v behu na $400\,\mathrm{m}$ pre oba pohlavia.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha CE ... taneční

Zní to sice nepravděpodobně, ale někteří matfyzáci rádi tančí. Daniel se snaží naučit pokročilé kroky, například takovou jednoduchou piruetu. Chytí svoji partnerku za boky a roztočí se s ní dokola. Jaká odstředivá síla působí na Danielovu taneční partnerku? Představte si, že Daniel je opravdu silný, dokáže držet partnerku těsně nad zemí a drží ji na vzdálenost natažených ruk – řekněme $r = 0{,}90\,\mathrm{m}$. Uvažujte, že rotující pár udělá $f = 0{,}75$ otáčky za sekundu, partnerka váží $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ a Daniel váží $m_2 = 70\,\mathrm{kg}$.

Daniel snil o lepších formách prokrastinace.

Partnerka sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = 0,75 \cdot 2\pi s^{-1} = 1{,}5\pi s^{-1}$. Dano a Danka rotujú okolo spoločného ťažiska, takže Danka je vo vzdialenosti $R = \frac{m_2 r}{m_1+m_2} = 0{,}525\,\mathrm{m}$ od osi otáčania. Odstredivú silu spočítame jednoducho podľa vzorca

$$F = m_1 a\,,$$

kde a je odstredivé zrýchlenie, ktoré spočítame ako $a = \omega^2 R$. Dostávame odstredivú silu

$$F = m_1 \omega^2 r \doteq 583\,\mathrm{N}\,.$$

Pre zaujímavosť, odstredivé zrýchlenie pôsobiace na partnerku počas otáčania je asi $12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, čo je viac ako tiažové zrýchlenie. Dano je však babrák a pri pokuse o otočku obaja spadli už po pol obrátke.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha CF ... teplo a srážky

Kdesi v prostoru se dokonale nepružně srazily dvě částice s hybnostmi $m_1\mathbf{v_1}$ a $m_2\mathbf{v_2}$ (jsou to vektorové veličiny). Jaké teplo se uvolnilo při srážce? *Jindra hrál kuličky.*

Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti

$$m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} = (m_1+m_2)\mathbf{u} \tag{1}$$

a zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left|\mathbf{u}\right|^2 + Q = \frac{1}{2}m_1\left|\mathbf{v_1}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\mathbf{v_2}\right|^2\,. \tag{2}$$

Z rovnice (1) vyjádříme rychlost $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}}{m_1+m_2}$$

a dosadíme ji do rovnice (2)

$$Q = \frac{1}{2}m_1\left|\mathbf{v_1}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\mathbf{v_2}\right|^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left|\frac{m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2}}{m_1+m_2}\right|^2\,.$$

Úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}m_1\left|\mathbf{v_1}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\mathbf{v_2}\right|^2 - \frac{1}{2(m_1+m_2)}\left(m_1^2\left|\mathbf{v_1}\right|^2 + 2m_1m_2\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} + m_2^2\left|\mathbf{v_2}\right|^2\right)\,,\\
Q &= \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left|\mathbf{v_1}\right|^2 - \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} + \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left|\mathbf{v_2}\right|^2\,,\\
Q &= \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\left(\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}\right)^2\,.
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že uvolněné teplo závisí jenom na velikosti rozdílu vektorů rychlostí, což je důsledkem toho, že teplo musí být stejné v libovolné inerciální vztažné soustavě.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha CG ... vaříme

Danka vaří na plotně s výkonem P. Do hrnce o pokojové teplotě $23\,^\circ\mathrm{C}$ nabere $2{,}00\,\mathrm{l}$ vody s teplotou $40\,^\circ\mathrm{C}$. Za přesně $t_1 = 6\,\mathrm{min}$ je voda uvedena do varu. Danka pak vroucí vodu spotřebuje a do hrnce, který stihl vychladnout na teplotu $70\,^\circ\mathrm{C}$, nabere to samé množství vody s teplotou $40\,^\circ\mathrm{C}$. O kolik rychleji bude voda přivedena do varu? Hrnec má při varu vody teplotu $105\,^\circ\mathrm{C}$ a plotna předává teplo hrnci s účinností $\eta = 0{,}85$. Tepelná kapacita hrnce je $C = 439\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ a měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

Danka varí na kolejnej dvojplatničke.

Označme všetky teploty zo zadania $T_1 = 23\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 40\,^\circ\mathrm{C}$, $T_3 = 70\,^\circ\mathrm{C}$, $T_4 = 105\,^\circ\mathrm{C}$. Voda vrie pri teplote $T_\mathrm{v} = 100\,^\circ\mathrm{C}$ Medzi platničkou a sústavou hrniec plus voda prebieha tepelná výmena, ktorú pre prvý ohrev popisuje kalorimetrická rovnica

$$\eta P t_1 = C\left(T_4 - T_1\right) + c_\mathrm{v} V \varrho \left(T_\mathrm{v} - T_2\right) \,,$$

kde V je objem vody a ϱ je jej hustota. Pre druhý ohrev platí analogická kalorimetrická rovnica

$$\eta P t_2 = C\left(T_4 - T_3\right) + c_\mathrm{v} V \varrho \left(T_\mathrm{v} - T_2\right) \,.$$

Podelením týchto rovníc eliminujeme účinnosť a výkon platničky dostávajúc vzťah

$$w = \frac{t_2}{t_1} = \frac{C\left(T_4 - T_3\right) + c_\mathrm{v} V \varrho \left(T_\mathrm{v} - T_2\right)}{C\left(T_4 - T_1\right) + c_\mathrm{v} V \varrho \left(T_\mathrm{v} - T_2\right)} \,.$$

Po dosadení hodnôt dostávame hodnotu pomeru $w = 0{,}961\,6$, z čoho máme rozdiel časov jednoducho ako

$$\Delta t = (w - 1)\, t_1 \doteq -14\,\mathrm{s}.$$

Záporné znamienko znamená, že v druhom prípade zvrie voda rýchlejšie o $14\,\mathrm{s}$. Vidíme teda, že veľa času neušetríme. V praxi je však oveľa dôležitejšia tepelná kapacita samotnej platničky, ktorá je väčšia ako kapacita hrnca, preto druhá dávka vody zvrie badateľne rýchlejšie.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha CH ... voda v koleni

Mějme trubici, kterou teče voda s hmotnostním průtokem Q a rychlostí v. Tato trubice v jednom bodě zatáčí tak, že její dvě ramena svírají úhel α (tedy $\alpha = \pi$ by znamenalo, že vlastně žádná zatáčka není). Jak velkou silou působí voda na tento ohyb?

Legolas nemá vodu v koleni a je za to rád.

Za malý čas $\mathrm{d}t$ prejde kolenom $\mathrm{d}m = Q\mathrm{d}t$ vody, ktorá zmení svoju rýchlosť o $\mathbf{u} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}$. Silu, ktorou voda pôsobí na koleno, dostaneme z prvého a tretieho Newtonovho zákona ako

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = Q\mathbf{u}\,.$$

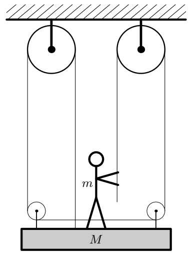
Pre jej veľkosť máme s použitím trošky geometrie

$$F = 2Qv\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \,.$$

Vidíme, že pre $\alpha = \pi$ dostávame $F_\mathrm{v} = 0$, čo súhlasí s tým, že v takom prípade by voda vôbec nezrýchľovala.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha DA ... zem je láva



Fykosák o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$ na obrázku tahá konstantní silou F za lano. Hmotnost plošinky je $M = 50\,\mathrm{kg}$. Může se Fykosák vlastní silou vytáhnout nad plošinku? Pokud ano, jakou silou musí táhnout, aby se mu to podařilo? Zanedbejte momenty setrvačnosti všech kladek.

Matěj spadl do hluboké jámy a nemohl se z ní dostat.

Vlastností každého lana v systému dokonalých kladek je, že je v každém bodě napínáno stejnou silou. Na plošinku působí pouze provaz zrychlením

$$a_\mathrm{p} = \frac{3F}{M}\,,$$

protože na plošinku vedou celkem tři části provazu, které jsou napínány silou F. Na Fykosáka provaz působí zrychlením

$$a_\mathrm{F} = \frac{F}{m}\,,$$

protože Fykosák táhne pouze za jedno lano. Jelikož po dosazení platí $a_\mathrm{F} < a_\mathrm{p}$ pro libovolnou (kladnou) sílu F, bude na plošinku vždy působit větší zrychlení směrem nahoru než na Fykosáka. Proto se nikdy nemůže vytáhnout nad plošinku.

Započtení tíhového zrychlení výsledek neovlivní, od obou zrychlení jen odečteme g a nerovnost bude stále platit.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha DB ... výtahová mechanika

V stojícím výtahu je položena nádoba s vodou, v které je zcela ponořeno hliníkové kvádrové závaží s rozměry $x = 3{,}00\,\mathrm{cm}$, $y = 4{,}00\,\mathrm{cm}$ a $z = 5{,}00\,\mathrm{cm}$. Závaží visí na nehmotné pružině o tuhosti $k = 230\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, která vede ze stropu výtahu a na počátku je napnutá. Výtah se rozjede nahoru s konstantním zrychlením $a = 3{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Kolikrát se zvětší prodloužení pružiny oproti předchozí situaci? Hustota hliníku je $\varrho_\mathrm{h} = 2\,700\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Předpokládejte, že pružina při prodlužování nedosáhne až na podlahu. *Dodo šel od Danky s talířem polévky.*

V prípade stojaceho výťahu sa tiažová sila F_g pôsobiaca na závažie vyrovnáva so vztlakovou silou F_v a elastickou silou pružiny F_p. Platí

$$V\varrho_\mathrm{h} g = V\varrho_\mathrm{v} g + k\delta l_0\,,$$

kde $V = xyz$ je objem závažia, ϱ_v je hustota vody a δl_0 je počiatočné predĺženie pružiny. Zrychľujúci výťah je nerozlíšiteľný od stojaceho výťahu, na ktorý pôsobí tiažové zrychlení $a + g$. Rovnováha potom vyzerá nasledovne

$$V\varrho_\mathrm{h}\,(a+g) = V\varrho_\mathrm{v}\,(a+g) + k\delta l\,.$$

Stačí z oboch rovníc vyjadriť predĺženia pružiny a dať ich do pomeru. Dostávame

$$\frac{\delta l}{\delta l_0} = 1 + \frac{a}{g} \doteq 1{,}31\,.$$

Predĺženie pružiny sa v zrýchľujúcom výťahu zväčší 1,31-krát.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha DC ... rotace vektoru rychlosti

Všichni jistě znáte klasický šikmý vrh. Například trajektorie míče, který fotbalista kopl pod úhlem α s počáteční rychlostí v_0. Najděte závislost velikosti úhlové rychlosti ω rotace vektoru rychlosti $\mathbf{v}$ na počáteční rychlosti v_0, počátečním směru α, velikosti okamžité rychlosti v a gravitačním zrychlení g. *Robo se na těláku zamyslel.*

Zrýchlenie pôsobiace v kolmom smere na trajektóriu (radiálne) vieme vyjadriť ako $a_\mathrm{n} = g\cos\vartheta$, kde ϑ je uhol medzi vektorom rýchlosti a horizontálnym smerom. Keďže vektor okamžitej rýchlosti tvorí dotyčnicu k trajektórii, pre tento uhol platí $\cos\vartheta = v_x/v$. Na loptu nepôsobí vo vodorovnom smere sila, jej rýchlosť v tomto smere bude počas celej doby letu rovnaká $v_x = v_0\cos\alpha$. Ďalej vieme, že pre veľkosť dostredivého zrýchlenia platí

$$a_\mathrm{c} = \frac{v^2}{R} = \omega v\,,$$

kde R je polomer krivosti trajektórie v danom mieste. Lokálne sa dá pohyb lopty aproximovať pohybom po kružnici. Uhlová rýchlosť rotácie vektora rýchlosti je pri takomto pohybe rovnaká ako uhlová rýchlosť otáčania telesa okolo stredu krivosti. Napíšeme preto rovnosť pre zrýchlenia a vyjadrením ω nájdeme hľadaný vzťah

$$\omega = \frac{a_\mathrm{c}}{v} = \frac{a_\mathrm{n}}{v} = \frac{g v_0\cos\alpha}{v^2}\,.$$

Róbert Jurčo
robert.jurco@fykos.cz

Úloha DD ... těžká plechovka

Mějme symetrickou plechovku s hmotností m, výškou H a podstavou S, ve které je kapalina s hustotou ϱ. Pro jakou výšku hladiny h kapaliny v plechovce bude společné těžiště plechovky a kapaliny nejníže? *Lego má rád pivo a fyziku.*

Zrátame si výšku ťažiska pomocou váženého priemeru. Plechovka je symetrická, jej ťažisko teda bude vo výške $H/2$. Výška ťažiska kvapaliny bude obdobne $h/2$. Potom výška spoločného ťažiska bude

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{mH/2 + Sh\varrho h/2}{m + Sh\varrho}\,.$$

Tento výraz môžeme zderivovať podľa h a hľadať nulové body. Rýchlejšie (a hlavne elegantnejšie) sa ale k výsledku dopracujeme, keď si uvedomíme, že ťažisko je najnižšie práve vtedy, keď je v rovnakej výške ako hladina. Ak totiž v takom momente dolejeme do plechovky ďalšiu kapalinu, je zrejmé, že tým ťažisko posunieme hore. Rovnako, keď by sme z plechovky kapalinu odliali (čo si tiež môžeme predstaviť ako pridanie kapaliny so zápornou hustotou tam, kde je kapalina), ťažisko stúpne. Môžeme teda položiť $x = h$ a úpravami dostávame kvadratickú rovnicu

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{1}{2}\frac{mH + Sh^2\varrho}{m + Sh\varrho}\,,\\
0 &= S\varrho h^2 + 2mh - mH\,,
\end{aligned}
$$

ktorej riešenie je

$$h = \frac{-2m + \sqrt{4m^2 + 4Hms\varrho}}{2S\varrho} = \frac{\sqrt{m^2 + HmS\varrho} - m}{S\varrho}\,.$$

Záporný koreň nás nezaujíma.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha DE ... traktorista Jindra

Traktorista Jindra má netradiční koníček – rád se pohybuje z bodu A do bodu B v nejkratším možném čase. V tomto okamžiku se Jindra se svým traktorem nalézá na poli v bodě A a bod B se nachází ve vzdálenosti d východně od bodu A na tomtéž poli. Velikost rychlosti traktoru v závisí na azimutu pohybu α vztahem $v = v_0\left|\cos\alpha\right|$ ($v = v_0$ pokud jede na sever nebo na jih). Za jak dlouho dojede Jindra do bodu B? *Jindra stále ještě neudělal řidičák.*

Úlohu vyřešíme úvahou. Představme si na poli kartézskou souřadnicovou soustavu, jejíž osa x míří na východ a osa y míří na sever. Jindra se musí s traktorem přemístit o vzdálenost d ve směru osy x. Azimut se měří od severu po směru hodinových ručiček. Rychlost ve směru osy x zjistíme tak, že vynásobíme velikost rychlosti sinem azimutu

$$v_x = v_0\left|\cos\alpha\right|\sin\alpha\,.$$

Nás zajímá pohyb v kladném směru osy x, který nastane pro $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ\rangle$. Zřejmě při něm platí

$$v_x = v_0\left|\cos\alpha\sin\alpha\right| = \frac{v_0}{2}\left|\sin 2\alpha\right|\,.$$

Azimut, pro který bude velikost rychlosti maximální, nalezneme z maxima funkce $f = \left|\sin 2\alpha\right|$. Pro α od 0° do 180° (chceme se pohybovat východním směrem) nabývá f maxima $f = 1$ pro $2\alpha_1 = 90^\circ$, $2\alpha_2 = 270^\circ$. Řešením je tedy $\alpha_1 = 45^\circ$ a $\alpha_2 = 135^\circ$. Nyní si musíme položit otázku: „Může jet Jindra takovou trasou, aby se pokaždé pohyboval s maximální rychlostí v kladném směru osy x?“ Ano, může. Třeba tak, že polovinu trasy pojede pod azimutem $\alpha_1 = 45^\circ$ a zbytek pojede pod azimutem $\alpha_2 = 135^\circ$. Tím bude zaručeno, že jeho výsledná souřadnice y bude stejná jako na začátku. Vzhledem k tomu, že se celou cestu pohybuje maximální možnou rychlostí ve směru osy x, neexistuje rychlejší trasa. Čas na přesun do bodu B spočítáme jako

$$t = \frac{d}{v_x} = \frac{2d}{v_0\left|\sin 2\alpha_1\right|} = \frac{2d}{v_0}\,.$$

Jindrovi bude cesta do bodu B trvat čas $t = 2d/v_0$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha DF ... čočkoidní zrcadlo

Mějme tenkou ploskovypuklou čočku s poloměrem křivosti R a indexem lomu n. Na vypuklou stranu čočky přiděláme lesklou fólii tak, že se chová jako vyduté kulové zrcadlo s poloměrem R. Určete (kladnou) ohniskovou vzdálenost této soustavy. *Matěj se obdivuje v zrcadle.*

Řešení provedeme geometrickým způsobem. Ohnisko je místo, do kterého se zobrazí rovnoběžné paprsky. Vezměme si tedy paprsek rovnoběžný s optickou osou v malé vzdálenosti x od optické osy. Jelikož je čočka tenká, budeme využívat paraxiální aproximace $\sin x \approx x$, $\operatorname{tg} x \approx x$.

- **průchod plochou stranou** - Paprsek nezmění svůj směr, protože dopadá kolmo.
- **odraz od zrcadla** - Rovnoběžný paprsek s osou se odráží směrem do ohniska zrcadla ve vzdálenosti $f_z = \frac{R}{2}$. S osou tedy svírá úhel $\alpha = \frac{x}{f_z}$.
- **druhý průchod plochou stranou** - Paprsek se láme tak, že po východu z čočky svírá s optickou osou úhel β, který je dán Snellovým zákonem $n\alpha = \beta$.

Protože je čočka tenká, paprsek vyjde z čočky opět ve vzdálenosti x od optické osy. Pouze nyní svírá s osou úhel β. Ohnisko je místo, ve kterém protne optickou osou

$$f = \frac{x}{\beta} = \frac{x}{n\alpha} = \frac{x}{n\frac{x}{f_z}} = \frac{f_z}{n} = \frac{R}{2n}\,.$$

Vidíme, že místo protnutí nezávisí na vzdálenosti x paprsku od osy, kde se tedy scházejí všechny rovnoběžné paprsky s osou. To platí, pokud je x malé a mohli jsme využít paraxiálních aproximací, jinak bychom zjistili, že čočka i zrcadlo mají optické vady, které způsobí, že paprsky dále od osy neskončí přesně v ohnisku.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha DG ... na absolutním dně

Dano má studnu s konstantním kruhovým průřezem a s hloubkou $h = 23{,}0\,\mathrm{m}$, ale nemá v ní žádnou vodu. Když se ze středu úplného dna podívá na oblohu, uvidí všechny hvězdy se zenitovou vzdáleností menší než $\alpha = 8{,}00^\circ$. Jaký nejmenší objem neznámé kapaliny s indexem lomu $n = 2{,}31$ musíme do studny nalít, aby Dano viděl i hvězdy se zenitovou vzdáleností 2α?
... Jáchym ale ví, jak to skončí.

Danův výhled je v obou případech omezován okrajem studny. Pro počáteční situaci platí $r = h \operatorname{tg} \alpha$, kde r je poloměr studny. Po nalití kapaliny do studny nastane lom světla na hladině. Úhel lomu bude podle zadání 2α, úhel dopadu označme β. Ze Snellova zákona máme

$$\sin 2\alpha = n \sin \beta\,,$$

kde n je index lomu vody.

Dále nechť h_1, resp. h_2 je vzdálenost od dna k hladině, resp. vzdálenost od hladiny k hornímu okraji, přičemž $h_1 + h_2 = h$. Obdobně r_1, resp. r_2 budou vzdálenosti od středu studny k bodu lomu krajního paprsku, resp. odsud až k okraji studny. Potom $r_1 + r_2 = r$. Rovnou můžeme psát rovnici pro horní trojúhelník

$$\sin 2\alpha = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + h_2^2}}\,,$$

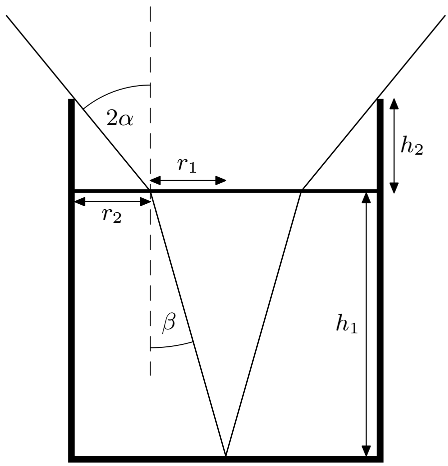
ze které vyplývá

$$r_2 = \left(\sin^{-2}(2\alpha) - 1\right)^{-\frac{1}{2}} h_2 = \operatorname{tg}(2\alpha)\, h_2 = k_2 h_2\,.$$

Obdobně pro dolní trojúhelník platí

$$r_1 = \left(\sin^{-2}\beta - 1\right)^{-\frac{1}{2}} h_1 = \left(n^2 \sin^{-2}(2\alpha) - 1\right)^{-\frac{1}{2}} h_1 = k_1 h_1\,.$$

V těchto rovnicích jsme využili goniometrické funkce sin proto, abychom mohli rovnou použít Snellův zákon. Nepěkné výrazy jsme schovali do konstant k_1 a k_2.



Ve vztahu $r = r_1 + r_2$ si dosadíme za r_1 a r_2, čímž dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$h = h_1 + h_2\,,$$
$$r = k_1 h_1 + k_2 h_2\,.$$

Odtud už plyne jednoznačné řešení pro výšku hladiny

$$h_1 = \frac{k_2 h - r}{k_2 - k_1}\,.$$

Nás zajímá celkový objem kapaliny, proto tuto výšku ještě vynásobíme obsahem průřezu πr^2. Rovnou si dosadíme za r a k_2 a dostaneme výsledek

$$V = \pi r^2 h_1 = \pi h^3 \frac{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - k_1} \operatorname{tg}^2\alpha \doteq 663\,\mathrm{m}^3\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha DH ... retroreflexe

Retroreflexní prvky se jmenují takto proto, že odrážejí příchozí světlo zpět směrem ke zdroji. Existují dva způsoby konstrukce. Buď plochu pokryjeme miniaturními koutovými odražeči (např. odrazka na kole), nebo naneseme na plochu reflexní materiál a do něj částečně zapustíme průhledné kuličky (např. bílý pruh na reflexní vestě). Spočítejte ideální index lomu průhledných kuliček, aby retroreflexně odrážely většinu dopadajícího světla. *Jindra řešil N-trophy*[9]*.*

Materiál se bude chovat retroreflexně, pokud bude příchozí paprsek rovnoběžný s odchozím paprskem. Nakresleme si spojnici zdroj světla - střed kuličky a předpokládejme při tom, že poloměr kuličky je oproti vzdálenosti ke zdroji zanedbatelný. Příchozí paprsek je rovnoběžný s optickou osou a dopadá na kuličku v kolmé vzdálenosti h od optické osy a s kolmicí v bodě dopadu svírá úhel α. Poloměr kuličky je R. Paraxiální aproximace je platná, pokud platí $h/R \ll 1$. Paprsky dopadající dále od optické osi bodou kuličkou rozptýlené víc do stran, ale v tomto případě nejde o zásadní rozptyl. Můžeme napsat

$$\sin\alpha = \frac{h}{R} \approx \alpha\,.$$

Ze Snellova zákona spočítáme úhel lomu β, o němž můžeme také předpokládat $\beta \ll 1$

$$\sin\alpha = n\sin\beta\,,$$
$$\frac{h}{R} = n\beta\,.$$

K retroreflexnímu odrazu dojde, pokud zlomený paprsek dopadne na místo, kde optická osa protíná protilehlý povrch koule. Tím pádem bude obrazec příchozí paprsek + odchozí paprsek symetrický okolo optické osy a odchozí paprsek bude stejně jako příchozí paprsek rovnoběžný s optickou osou. Při aproximaci malých úhlů můžeme napsat $\beta = h/(2R)$, a tudíž

$$\frac{h}{R} = n\frac{h}{2R}\,,$$
$$n = 2\,.$$

Ideální index lomu průhledné kuličky je $n = 2$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha EA ... škube to

Určete střední kvadratickou hodnotu velikosti změny vektoru rychlosti pylového zrnka o hmotnosti $M = 250\,\mathrm{ng}$, kterou mu po čelní dokonale pružné srážce udělí atom argonu (tedy po takové srážce, že se pohybují směrem přesně proti sobě) ve vzduchu s teplotou $t = 25{,}3\,\mathrm{^\circ C}$ a s tlakem $p = 1\,003\,\mathrm{hPa}$. *Dodo jel přeplněným metrem ze školy.*

Pri dokonale pružnej zrážke sa zachováva hybnosť a kinetická energia. Ak je na začiatku peľové zrnko v pokoji (prejdeme do takej vzťažnej sústavy), po náraze sa bude pohybovať rýchlosťou u danou vzťahmi

$$mv = Mu + mv' ,$$
$$mv^2 = Mu^2 + mv'^2 ,$$

kde m je hmotnosť atómu argónu, v je rýchlosť atómu pred a v' po zrážke. Po dosadení v' z prvej rovnice do druhej dostávame pre rýchlosť zrnka

$$u = \frac{2vm}{M+m} \approx \frac{2vm}{M} .$$

Zadanie sa pýta práve na strednú kvadratickú hodnotu tejto veličiny. Vidíme, že táto bude závisieť na strednej kvadratickej hodnote rýchlosti atómov argónu v_k. Pre ňu máme z ekvipartičného teorému vzťah

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{k}^2 = \frac{s}{2} k_\mathrm{B} T ,$$

kde T je teplota plynu a s je počet aktívnych stupňov voľnosti. Po dosadení dostávame strednú kvadratickú hodnotu u ako

$$u_\mathrm{k} = \frac{2\sqrt{s k_\mathrm{B} T m}}{M} .$$

Zostáva túto hodnotu vyčísliť. Hmotnosť atómu argónu určíme z Avogadrovej konštanty a molárnej hmotnosti ako $m = M_\mathrm{m}/N_\mathrm{A} = 6{,}64 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Počet stupňov voľnosti $s = 3$ translačné stupne voľnosti. Po dosadení dostávame $u_\mathrm{k} = 2{,}3 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha EB ... zelený posun

Chuck Norris má tak rychlé auto, že občas projede, když je na semaforu oranžová, protože ji vidí jako zelenou. To ale nic není. Paťo (ten, který zaběhl dvanáctiminutovku za 6 minut) běží tak rychle, že vidí červenou jako zelenou. Vlnové délky zelené, oranžové a červené jsou postupně $\lambda_\mathrm{z} = 550\,\mathrm{nm}$, $\lambda_\mathrm{o} = 600\,\mathrm{nm}$, $\lambda_\mathrm{c} = 700\,\mathrm{nm}$. *O kolik je Paťo rychlejší než auto Chucka Norrise?*

Lego běžel k přechodu.

Dá sa predpokladať, že rýchlosti, ktorými idú Paťo a auto Chucka Norrisa, sú obe relativistické. Zároveň vlnenie, o ktoré sa jedná, je svetlo a nie zvuk. Treba teda použiť relativistickú verziu Dopplerovho zákona

$$\lambda_\mathrm{poz} = \lambda_\mathrm{zdroj} \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} .$$

Tento vzorec sa dá buď nájsť v tabuľkách, alebo sa dá aj odvodiť z pôvodného zarátaním relativistických efektov. Podiel v/c sa zvykne označovať ako β. Keď si navyše označíme $\lambda_\mathrm{poz}/\lambda_\mathrm{zdroj} = \alpha$, môžeme si vyjadriť

$$\beta = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} .$$

Čiže dostávame, že auto Chucka Norrisa ide rýchlosťou

$$v_{\mathrm{Chuck}} = \frac{1 - (\lambda_{\mathrm{z}}/\lambda_{\mathrm{o}})^2}{1 + (\lambda_{\mathrm{z}}/\lambda_{\mathrm{o}})^2} c \doteq 2{,}60 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Obdobne pre Paťa máme

$$v_{\mathrm{Pato}} = \frac{1 - (\lambda_{\mathrm{z}}/\lambda_{\mathrm{c}})^2}{1 + (\lambda_{\mathrm{z}}/\lambda_{\mathrm{c}})^2} c \doteq 7{,}10 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Čiže Paťo je o

$$v_{\mathrm{Pato}} - v_{\mathrm{Chuck}} = \frac{2\lambda_{\mathrm{z}}^2\left(\lambda_{\mathrm{c}}^2 - \lambda_{\mathrm{o}}^2\right)}{\left(\lambda_{\mathrm{c}}^2 + \lambda_{\mathrm{z}}^2\right)\left(\lambda_{\mathrm{o}}^2 + \lambda_{\mathrm{z}}^2\right)} c \doteq 0{,}15c \doteq 4{,}49 \cdot 10^7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

rýchlejší než auto Chucka Norrisa.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EC ... Jedeme do kopce?

Sedíme ve vlaku a jsme v tunelu. Strojvedoucí se rozhodne, že vlak nechá jet na setrvačnost. Jaký úhel α bude svírat hladina vody ve sklenici vůči podlaze vlaku (o které předpokladáme, že pro stojící vlak na vodorovných kolejích je vodorovná)? Stoupání trati je $t = 1{,}2\,\%$ a koeficient valivého odporu mezi kolejemi a koly vlaku je $f = 0{,}002$? *Dodo se vracel do školy.*

Vlak sa pohybuje do kopca. Najprv prevedieme stúpanie z percent na uhol naklonenej roviny. Stúpanie je dané ako zmena výšky na horizontálnu vzdialenosť, teda uhol určíme ako $\varphi = \operatorname{arctg} t$. Pohyb vlaku je spomaľovaný priamo tangenciálnou zložkou tiažového zrýchlenia a aj trecím zrýchlením určeným z normálovej zložky. Pre zrýchlenie vlaku v smere koľají teda máme

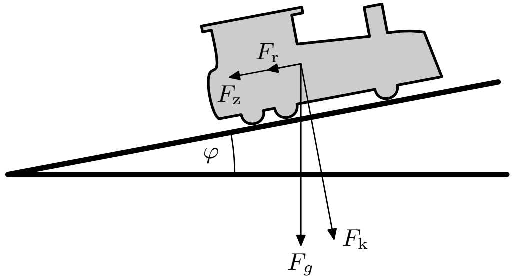
$$a_{\mathrm{v}} = a_{\mathrm{t}} + f a_{\mathrm{n}} = g\left(\sin\varphi + f\cos\varphi\right)\,.$$

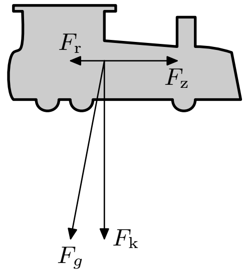
V neinerciálnej sústave spojenej s vlakom na nás pôsobí zotrvačné zrýchlenie v smere podlahy o veľkosti a_{v}, ale opačným smerom (teda v smere pohybu vlaku), a pravé zrýchlenie - tiažové zrýchlenie o veľkosti g v smere φ od kolmice na podlahu k zadnej časti vlaku. Aby sme určili uhol, ktorý zviera hladina vody s podlahou, musíme určiť uhol medzi kolmicou a výslednicou týchto dvoch síl. Tieto dva uhly sú totiž rovnako veľké. Rozložme tiažové zrýchlenie do smeru kolmo a_{k} a rovnobežne a_{r} s podlahou. Platí

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{k}} &= g\cos\varphi\,,\\ a_{\mathrm{r}} &= g\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Keď k rovnobežnej zložke pripočítame zotrvačné zrýchlenie $a_{\mathrm{z}} = -a_{\mathrm{v}}$, dostávame hľadaný uhol ako arkustanges podielu veľkostí zrýchlenia v „horizontálnom“ a „vertikálnom“ smere

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_{\mathrm{r}} + a_{\mathrm{z}}}{a_{\mathrm{k}}} = \operatorname{arctg}\frac{a_{\mathrm{r}} - a_{\mathrm{v}}}{a_{\mathrm{k}}} = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi - (\sin\varphi + f\cos\varphi)}{\cos\varphi} = -\operatorname{arctg} f \doteq -0{,}11^{\circ}\,.$$





Nás ale zaujíma len veľkosť, znamienko nám dáva informáciu o smere hladiny. Odpoveďou tak je $\alpha \doteq 0{,}11\,^{\circ}$. Zaujímavým faktom plynúcim z riešenia je, že podľa sklonu hladiny nevieme rozhodnúť, či ideme po rovine, alebo do kopca. Toto plynie aj z Einsteinovho princípu ekvivalencie gravitačného poľa a zrýchleného pohybu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha ED ... děravá planeta

Ve velké vzdálenosti od Země se nachází raketa, které došlo palivo. Tuto raketu naše planeta pomaličku přitahuje a vědci v NASA přemýšlejí, jak by zachránili posádku. V tom Honza přijde s nápadem vykopat skrz jádro Země tunel na opačnou stranu zeměkoule, aby raketa nenarazila do Země. Pro zjednodušení uvažujme, že raketa se na začátku nehýbe a je v nekonečné vzdálenosti od Země. Tunel je ve směru pádu rakety, tj. ve směru spojnice středu Země a rakety. Honza chce vědět, jaká bude rychlost rakety ve středu Země. Předpokládejte, že Země je homogenní. *Robo se ocitl uvnitř planety.*

Hmotnost rakety je m, hmotnost Země M a poloměr Země je R. Treba si uvedomiť, že raketa má na začiatku nulovú kinetickú aj potenciálnu energiu. Kedže energia rakety sa nemení, vieme, že v strede Zeme bude súčet kinetickej a potenciálnej energie rakety nula

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + E_p\,.$$

Teraz nám už zostáva zistiť len potenciál v strede Zeme φ. Z toho ľahko dopočítame energiu ako

$$E_p = m\varphi\,.$$

Vieme, že potenciál φ_R na povrchu planéty je daný ako

$$\varphi_R = -\frac{GM}{R}\,.$$

Z Gaussovho zákona pre gravitáciu máme intenzitu vnútri Zeme vo vzdialenosti r od jej stredu danú ako

$$E = -\frac{GM_r}{r^2}\,,$$

kde M_r je hmotnosť tej časti planéty, ktorá sa nachádza pod polomerom r. Pretože je planéta homogénna, hmotnosť je priamo úmerná objemu. Ten je zase priamo úmerný tretej mocnine polomeru, takže platí

$$M_r = \frac{r^3}{R^3} M \,.$$

Potenciál v strede planéty φ_0 dostaneme sčítaním potenciálu na povrchu a integrálu záporne vzatej intenzity od povrchu do stredu

$$\varphi_0 = \varphi_R + \int_R^0 (-E)\, \mathrm{d}r = \varphi_R + \frac{GM}{R^3} \int_R^0 r \,\mathrm{d}r = \varphi_R + \frac{GM}{R^3} \left[\frac{r^2}{2}\right]_R^0 = \varphi_R - \frac{GM}{2R} \,,$$

Odtiaľ po dosadení za φ_R máme potenciál v strede Zeme

$$\varphi_0 = -\frac{3GM}{2R} \,.$$

Po dosadení do energie dostávame

$$0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{3GMm}{2R} \,,$$

Odtiaľ máme rýchlosť rakety v strede Zeme $v = \sqrt{\frac{3GM}{R}} = 13{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Róbert Jurčo
`robert.jurco@fykos.cz`

Úloha EE ... kluzké lano

Dodo má studnu s vědrem, které má hmotnost $m = 1{,}75\,\mathrm{kg}$ a vejde se do něj objem $V = 15{,}2\,\mathrm{l}$ vody. Lano od vědra je přehozeno přes nepohyblivý trám s kruhovým průřezem. Když Dodo konstantní rychlostí vytahuje vědro plné vody nahoru, táhne přitom za lano silou $F = 237\,\mathrm{N}$. Jak velkou silou musí působit na lano v případě, že chce prázdné vědro spustit konstantní rychlostí dolů? *Jáchym preferuje technické lezení.*

Při výpočtu této úlohy je zásadní znalost toho, jak působí tření na lano obtočené kolem tyče s kruhovým průřezem. Přesný výpočet je možné najít například ve vzorových řešeních úloh **27.III.5** a **32.VI.4** z FYKOSu. V tomto případě stačí vědět jen to, že poměr síly na jedné straně lana ku síle na druhé straně lana je něco jako exponenciála z výrazu, ve kterém figuruje součinitel tření a úhel otočení. Všechny tyto veličiny jsou v obou situacích stejné, takže podíl sil na obou stranách bude konstanta.

V prvním případě je menší silou tíhová síla vědra s vodou

$$F_\mathrm{s} = (m + \varrho V)\, g \,,$$

zatímco na druhé straně Dodo táhne silou F. Ve druhém případě je menší síla F', se kterou Dodo brzdí lano. Na druhé straně pak působí tíhová síla samotného vědra bez vody

$$F_\mathrm{b} = mg \,.$$

Z úvahy výše vyplývá

$$\frac{F}{F_\mathrm{s}} = \frac{F_\mathrm{b}}{F'} = \mathrm{konst} > 1 \,.$$

Odtud už si snadno vyjádříme hledanou sílu

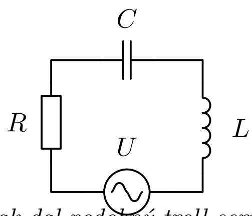
$$F' = \frac{F_\mathrm{b}F_\mathrm{s}}{F} = \frac{m + \varrho V}{F} mg^2 \doteq 12{,}0\,\mathrm{N}\,.$$

Nakonec se můžeme přesvědčit, že je to opravdu méně než přibližně 17 N potřebných na vyvážení prázdného vědra bez pomoci tření.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha EF ... RLC už opravdu

Lego vzal Dodův obvod z Fyziklání online a trochu ho přeskládal. Obvod vidíte na obrázku. Skládá se z cívky o indukčnosti $L = 10{,}0\,\mathrm{mH}$, kondenzátoru o kapacitě $C = 4{,}70\,\mathrm{\mu F}$, rezistoru o odporu $R = 1{,}00\,\mathrm{k\Omega}$ a zdroje střídavého napětí s efektivní hodnotou napětí $U_\mathrm{ef} = 230\,\mathrm{V}$ a nastavitelnou frekvencí. Lego nastavil frekvenci tak, aby byla amplituda protékajícího proudu maximální. Jaký je výkon obvodu?



Lego litoval řešitele Fyziklání online. A tak dal podobný troll sem.

Úlohu môžeme vyriešiť klasicky pomocou komplexnej symboliky, v skutočnosti nám ale postačí pár základných vedomostí o striedavom prúde.

Napríklad je dobré vedieť, že pre sériový (resp. taký, kde sa nedá rezistor „obísť“ cez cievky alebo kondenzátora) RLC obvod bude prúd (pre dané napätie) maximálny, keď bude frekvencia rovná rezonančnej frekvencii daného obvodu. Rezonančná frekvencia má totiž takú peknú vlastnosť, že sa impedancie od cievky a kondenzátora vyrušia, a teda $Z = R$.

Tým pádom pre efektívnu hodnotu prúdu platí $I_\mathrm{ef} = U_\mathrm{ef}/Z = U_\mathrm{ef}/R$. Prúd nie je voči napätiu nijako posunutý, čiže $\varphi = 0$.

A čo sú vlastne efektívne hodnoty napätia prúdu? Sú definované ako amplitúda danej veličiny deleno odmocnina z 2 (čiže $I_\mathrm{ef} = I_\mathrm{max}/\sqrt{2}$ a obdobne pre napätie). A sú tak definované z jediného dôvodu: aby platil vzorec $P = U_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef} \cos\varphi$. Protože $\cos 0 = 1$, výkon určíme ako

$$P = U_\mathrm{ef} I_\mathrm{ef} = \frac{U_\mathrm{ef}^2}{R} = 52{,}9\,\mathrm{W}\,,$$

čo je približne výkon štandardnej žiarovky, a veľmi presne riešenie už spomínanej úlohy z Fyziklání online :P

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha EG ... stáčení polarizace

Všichni víme, že pokud horizontálně polarizované světlo dopadá na ideální vertikální polarizační filtr, tak intenzita světla za filtrem je nula - světlo nemůže filtrem projít. Pokud ovšem před tento filtr umístíme další polarizační filtr, světlo už za posledním filtrem mužeme detekovat. Uvažujte nyní N filtrů umístěných po sobě tak, že každý filtr je natočený oproti předchozímu o úhel δ, který je stejný pro všechny filtry a zároveň celkový úhel stočení je stále 90 stupňů.

Spočítejte, o kolik se zmenší intenzita světla po průchodu touto sadou filtrů v limitě pro velké N. Původní intenzita je I_0. *Štěpán nutí foton k průchodu.*

Filtr pod úhlem δ k polarizaci světla zmenší velikost elektrického pole vlny na

$$|\mathbf{E_2}| = |\mathbf{E_1}| \cos\delta \,,$$

kde $\mathbf{E_{1,2}}$ je elektrické pole před/po průchodu filtrem, v tomto pořadí. Jelikož je intenzita úměrná čtverci velikosti pole, platí

$$I_2 = I_1 \cos^2\delta \,.$$

Tím pádem, po průchodu N filtry

$$I = I_0 \cos^{2N}\delta = I_0 \cos^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right) ,$$

kde I_0 je počáteční intenzita a dosadili jsme za $\delta = \frac{\pi}{2N}$. Pro velké N lze rozvinout kosinus jako

$$\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot(2N)^2} = 1 - \frac{\pi^2}{8N^2}$$

a tím pádem můžeme psát

$$I \approx (1 - \frac{\pi^2}{8N^2})^{2N} I_0 \approx \left(1 - \frac{\pi^2}{4N}\right) I_0 \,,$$

čili intenzita se zmenšila o $\frac{\pi^2}{4N} I_0$.

Štěpán Marek
`stepan.marek@fykos.cz`

Úloha EH ... TNT planeta

Uvažujte kouli z TNT volně plující vesmírem. Předpokládejte, že odpálením jednoho kilogramu TNT se uvolní energie $4{,}184\,\mathrm{MJ}$, která se ihned přemění na kinetickou energii produktů reakce (jejichž hmotnost bude stejná jako hmotnost původního TNT, tedy $1\,\mathrm{kg}$). Jaká největší koule se ještě může výbuchem celá dokonale rozptýlit (veškerá její hmota může být odmrštěna do nekonečna, kde na sebe nebude gravitačně působit)? Koule je homogenní s hustotou $\varrho = 1\,650\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a zajímá nás její poloměr. *Jáchym se přidal ke Karlovi v ničení planet.*

Nechť má naše planeta poloměr R a hmotnost

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \,.$$

Označíme-li výhřevnost trinitrotoluenu jako $H = 4{,}184\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$, celková energie výbuchu bude

$$E_\mathrm{v} = HM = \frac{4}{3}\pi R^3 H\varrho \,.$$

Nyní vezmeme horní vrstvu planety s tloušťkou $\mathrm{d}r$ a přemístíme ji do nekonečna. Gravitační potenciál na povrchu planety s poloměrem r a s hmotností m je

$$\varphi = -\frac{Gm}{r} \,,$$

čili musíme dodat energii

$$\mathrm{d}E = -\varphi \mathrm{d}m\,,$$

kde hmotnost vrstvy dm spočítáme jako

$$\mathrm{d}m = 4\pi r^2 \varrho \mathrm{d}r\,.$$

Tím jsme se zbavili horní vrstvy planety, čímž jsme zmenšili její poloměr a tím i hmotnost, protože

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\,.$$

Celkovou gravitační energii potřebnou na přemístění všech částí planety do nekonečna spočítáme integrálem

$$E_\mathrm{g} = \int_0^R \mathrm{d}E = -\int_0^R \varphi\,\mathrm{d}m = \frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{16\pi^2 G R^5 \varrho^2}{15}\,.$$

Vidíme, že E_g roste s pátou mocninou poloměru, zatímco E_v roste jen s třetí mocninou, takže pro všechna R větší než nějaké R_0 bude platit $E_\mathrm{g} > E_\mathrm{v}$ a planetu se nám tudíž nebude moct podařit dokonale rozptýlit. Můžeme psát výsledek

$$R_0 = \sqrt{\frac{5H}{4\pi G\varrho}} \doteq 3\,888\,\mathrm{km}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FA ... traktorista Jindra II.

Traktorista Jindra má netradiční koníček – rád se pohybuje z bodu A do bodu B v nejkratším možném čase. V tomto okamžiku se Jindra se svým traktorem nalézá na poli v bodě A a bod B se nachází ve vzdálenosti r od bodu A na tomtéž poli. Ve vzdálenosti d od úsečky AB vede rovnoběžně s ní silnice. Po poli se traktor pohybuje ve všech směrech stejnou rychlostí u a po silnici se traktor pohybuje rychlostí v, $v > u$. Jindra zjistil, že nezáleží na tom, jestli jede z A do B přímo nebo jestli nejdřív vyjede z A na silnici, pak jede kousek po silnici a pak zahne do B. V obou případech trvá jízda čas t. Vyjádřete poměr d/r pomocí u a v.

Jindra chtěl zažít totální odraz traktoru.

V první řadě musíme odvodit vztahy, které platí pro dobu přímé jízdy z A do B a dobu jízdy A – silnice – B. Dobu přímé jízdy označme t_p. Spočítáme ji ze vztahu pro rovnoměrný pohyb

$$t_\mathrm{p} = \frac{r}{u}\,.$$

S jízdou po silnici je to komplikovanější. Je zřejmé, že existuje nekonečně mnoho způsobů, jak může traktor na silnici najet, a stejně tak i nekonečně mnoho způsobů, jak z ní může sjet. Nejdříve tedy musíme přijít na to, který z nich je nejvýhodnější. Traktor z bodu A pojede k místu nájezdu na silnici po přímce.[1] Stejně tak pojede po přímce i z místa sjezdu do bodu B.

[1] Jelikož rychlost traktoru na poli je ve všech směrech konstantní, je pohyb po přímce časově nejvýhodnějším.

Předpokládejme, že z bodu A k silnici se traktor pohybuje pod úhlem α_A vzhledem ke kolmici a od silnice do bodu B se pohybuje pod úhlem α_B ke kolmici. Celkový čas jízdy t_s spočítáme

$$t_\mathrm{s} = \frac{d}{u\cos\alpha_\mathrm{A}} + \frac{r - d\operatorname{tg}\alpha_\mathrm{A} - d\operatorname{tg}\alpha_\mathrm{B}}{v} + \frac{d}{u\cos\alpha_\mathrm{B}}\,. \tag{3}$$

Musíme najít úhly α_A a α_B, pro které je čas t_s minimální. Lokální extrém závislosti najdeme tak, že její první derivaci položíme rovnu nule

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\alpha_\mathrm{A}} &= \frac{d\sin\alpha_\mathrm{A}}{u\cos^2\alpha_\mathrm{A}} - \frac{d}{v\cos^2\alpha_\mathrm{A}} = 0\,,\\ \frac{d(v\sin\alpha_\mathrm{A} - u)}{uv\cos^2\alpha_\mathrm{A}} &= 0\,,\\ \sin\alpha_\mathrm{A} &= \frac{u}{v}\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\alpha_\mathrm{B}} &= \frac{d\sin\alpha_\mathrm{B}}{u\cos^2\alpha_\mathrm{B}} - \frac{d}{v\cos^2\alpha_\mathrm{B}} = 0\,,\\ \frac{d(v\sin\alpha_\mathrm{B} - u)}{uv\cos^2\alpha_\mathrm{B}} &= 0\,,\\ \sin\alpha_\mathrm{B} &= \frac{u}{v}\,.\end{aligned}$$

Tento výsledek se dá se znalostí optiky interpretovat tak, že traktor se k rozhraní pole – silnice musí blížit pod kritickým úhlem. Vzhledem k rovnosti úhlů α_A a α_B můžeme označit $\alpha_\mathrm{A} = \alpha_\mathrm{B} = \alpha$. Platí vztahy mezi goniometrickými funkcemi $\cos\alpha = \sqrt{1-(u/v)^2}$ a $\operatorname{tg}\alpha = (u/v)/\sqrt{1-(u/v)^2}$, které můžeme dosadit do rovnice (3)

$$\begin{aligned}t_\mathrm{s} &= \frac{2d}{u\cos\alpha} + \frac{r - 2d\operatorname{tg}\alpha}{v} = \frac{r}{v} + 2d\frac{v - u\sin\alpha}{uv\cos\alpha}\,,\\ t_\mathrm{s} &= \frac{r}{v} + 2d\frac{v - \frac{u^2}{v}}{u\sqrt{v^2-u^2}}\,,\\ t_\mathrm{s} &= \frac{r}{v} + \frac{2d}{uv}\sqrt{v^2-u^2}\,.\end{aligned}$$

Z podmínky v zadání víme $t_\mathrm{p} = t_\mathrm{s} = t$, takže můžeme napsat rovnici

$$\begin{aligned}\frac{r}{u} &= \frac{r}{v} + \frac{2d}{uv}\sqrt{v^2-u^2}\,,\\ r\,(v-u) &= 2d\sqrt{v^2-u^2}\,,\\ \frac{d}{r} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v-u}{v+u}}\,.\end{aligned}$$

Jestliže Jindrova jízda z A do B trvá stejně dlouho přímo po poli i oklikou po silnici, pak pro poměr vdáleností d a r platí $d/r = 1/2\sqrt{(v-u)/(v+u)}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FB ... kupole

Polosférická kopule hvězdárny má průměr $d = 20\,\mathrm{m}$ a hmotnost $m = 200\,\mathrm{t}$ rozloženou rovnoměrně. Určete minimální potřebný výkon motorů posunujících kopuli, aby se dokázala otočit na přesně opačnou stranu za čas $t = 30\,\mathrm{s}$. Kopule je umístěná na ložiskách na kolejnicích, tření mezi kopulí a zbytkem budovy tedy zanedbejte. V počáteční a konečné poloze musí kopule stát. *Dodo rád pozoruje oblohu.*

Pozrime sa najprv na inú úlohu. Ak by sme mali daný maximálny výkon, najrýchlejšie by sme kupolu otočili, ak by sme ju prvú polovicu času urýchľovali maximálnym výkonom a druhú polovicu času brzdili maximálnym výkonom. Tak by sa v každom okamihu pohybovala najvyššou možnou rýchlosťou, a teda sa otočila za najmenší možný čas. Preto aj v našom prípade je hľadaný výkon taký, pri ktorom sa kupola otočí najrýchlejšie ako sa dá práve za daný čas t. Stačí teda nájsť taký výkon, ktorého zrýchľovaním sa kupola za $t/2 = \tau = 15\,\mathrm{s}$ otočí o $\Phi = \pi/2 = 90^\circ$.

Keďže dodávame konštantný výkon P, pre veľkosť kinetickej energie máme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} I\omega^2 = Pt\,,$$

kde I je moment zotrvačnosti polgule a ω je jej okamžitá uhlová rýchlosť v čase t. Vyjadríme uhlovú rýchlosť a po integrácii podľa času od začiatku do polovice otočenia máme

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{2Pt}{I}}\,,\\ \Phi &= \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \int_0^\tau \sqrt{\frac{2Pt}{I}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{I}}\tau^{\frac{3}{2}}\,.\end{aligned}$$

Z toho už vyjadríme hľadaný výkon ako

$$P = \frac{9\Phi^2 I}{8\tau^3} = \frac{9\Phi^2 I}{t^3}\,.$$

Ostáva ešte určiť moment zotrvačnosti polsféry ako polovicu momentu zotrvačnosti sféry (nie gule, sférou myslíme len povrch gule, resp. tenkú vrstvu), keďže je celá sféra rozrezaná symetricky (teda horná aj dolná polsféra majú rovnaký moment voči danej ose). Zároveň má ale polsféra polovičnú hmotnosť celej sféry, dostávame teda

$$I = \frac{2}{3} mR^2 = \frac{1}{6} md^2\,,$$

čo po dosadení do výrazu pre výkon dáva

$$P = \frac{3\Phi^2 md^2}{2t^3} = \frac{3\pi^2 md^2}{8t^3} \doteq 11{,}0\,\mathrm{kW}\,.$$

Na otáčanie kupoly takouto rýchlosťou teda potrebujeme výkon $P = 11{,}0\,\mathrm{kW}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FC ... světlo, prosím

Na stropě ve výšce $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$ nad zemí visí žárovka, která svítí izotropně do celého poloprostoru pod ní se světelným tokem $\Phi = 1400\,\mathrm{lm}$. Jak velká je plocha na zemi, kde je osvětlení větší než $E_0 = 25\,\mathrm{lx}$? *Danka potřebuje na koleji lepší osvětlení.*

Osvetlenie vo vzdialenosti r od zdroja je dané vzťahom

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha\,,$$

kde I je svietivosť zdroja a α je uhol medzi dopadajúcim lúčom a normálou k osvetlenej ploche. Pre svietivosť platí

$$I = \frac{\Phi}{\Theta}\,,$$

kde Θ je priestorový uhol, do ktorého sa šíri svetlo zo zdroja. V našom prípade $\Theta = 2\pi$. Osvetlenie je teda $E = \frac{\Phi\cos\alpha}{2\pi r^2}$. Vzdialenosť r vyjadríme jednoducho z pravouhlého trojuholníka ako $r = \frac{h}{\cos\alpha}$. Potom podmienku minimálneho osvetlenia môžeme písať ako

$$\frac{\Phi\cos^3\alpha}{2\pi h^2} > E_0\,.$$

Odtiaľ dostávame podmienku $\cos\alpha > \sqrt[3]{\frac{E_0 h^2 2\pi}{\Phi}}$, teda maximálny uhol je $\alpha_m \approx 27{,}3\,^\circ$. Potom plocha kruhu, ktorá spadá do tohto uhla, je daná ako $S = \pi x^2$, kde $x = h\operatorname{tg}\alpha_m$. Odtiaľ dostávame $S = \pi h^2 \operatorname{tg}^2\alpha \doteq 5{,}2\,\mathrm{m}^2$. Teda plocha na zemi, kde je osvetlenie väčšie ako $25\,\mathrm{lx}$ je asi $5{,}2\,\mathrm{m}^2$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha FD ... elektronová

Jakých hodnot velikosti celkového elektronového spinového kvantového čísla může nabývat neutrální atom dusíku? Ke každé z možností je možné najít energeticky nejvýhodnější konfiguraci. Jako odpověď udejte hodnoty spinu v pořadí odpovídajícím konfiguracím s postupně rostoucí energií. *Dodo porušuje Hundova pravidla.*

Spinové číslo (spin) elektrónu je 1/2 a atóm dusíka má 7 elektrónov. Celková hodnota spinu môže nadobúdať len hodnoty, ktoré dostaneme výberom znamienok vo výraze

$$\left|\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right|\,,$$

teda po zložení spinov dostávame hodnoty 1/2, 3/2, 5/2 a 7/2. Z Pauliho princípu vieme, že plný orbitál má celkový spin 0. Najnižšiu energiu má podľa Hundových pravidiel dusík v stave $1s^2 2s^2 2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1$, kde v p orbitáloch sú všetky spiny orientované rovnakým smerom (BÚNV[2] hore). Vtedy má dusík celkový elektrónový spin 3/2, ktorý určíme jednoducho ako rozdiel počtu elektrónov so spinom hore a dole. Pre ostatné možnosti musíme energiu zvýšiť. Pre celkový

[2] Bez Újmy Na Všeobecnosti

spin 1/2 máme napríklad stav $1s^2 2s^2 2p_x^2 2p_y^1 2p_z^0$, alebo stav ako pre prvý prípad, ale s prehodeným spinom jedného z nespárovaných elektrónov. Pre ďalšie možnosti si už nevystačíme s orbitálmi obsadenými v základnom stave, musíme mať totiž aspoň 5 nespárovaných elektrónov. Pre spin 5/2 musíme otvoriť orbitál $3s$ v stave $1s^2 2s^1 2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1 3s^1$, ktorý bude mať teda nutne vyššiu energiu. Energeticky najvyšší je stav s najnižšou energiou pre spin 7/2, ktorý potrebuje otvoriť ešte aj orbitál $3p$; vo všetkých siedmich orbitáloch s najnižšou energiou musíme mať po jednom nespárovanom elektróne, teda konfigurácia je $1s^1 2s^1 2p_x^1 2p_y^1 2p_z^1 3s^1 3p^1$.

	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$
$S = \frac{3}{2}$:	↑↓	↑↓	↑ | ↑ | ↑		
$S = \frac{1}{2}$:	↑↓	↑↓	↑↓ | ↑ |		
$S = \frac{5}{2}$:	↑↓	↑	↑ | ↑ | ↑	↑	
$S = \frac{7}{2}$:	↑	↑	↑ | ↑ | ↑	↑	↑ | |

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha FE ... třináct studní

Jáchym si přivlastnil všech dvanáct studní z předchozích úloh a přidal k nim vlastní, třináctou, studni. Následně do každé nalil $V_0 = 169{,}00\,\mathrm{m}^3$ kapaliny, přičemž pro každou studni to byla jiná kapalina. Poslední, třináctá, studna byla plná krve. Rituál vyvolávání démonů mohl začít. Jáchym nejdříve vzal objem $V = 13{,}00\,\mathrm{m}^3$ ze 13. studny a nalil jej do 1. studny. Po důkladném míchání vzal objem V z 1. studny a nalil jej zpět do té třinácté. Opět promíchal směs a celý proces zopakoval, nicméně tentokrát místo první studny použil druhou, potom třetí a tak dál, až po 12. studnu. Celkem tak proběhlo 24 přelití. Na konci změřil objemový zlomek každé ze třinácti kapalin, které se nyní nacházely ve 13. studni, a tyto hodnoty navzájem vynásobil. Jaké číslo dostal? *Jáchym se inspiroval úlohou třináct barelů ze 7. ročníku Fyziklání online.*

Označme $k = \frac{V}{V_0}$ a dále počítejme s tím, že objem v každé studni je 1. Nechť vektor $\mathbf{x}_i$ popisuje složení třinácté studny po celkem i krocích. Koncentrace j-té kapaliny je vyjádřena číslem x_i^j, přičemž krev budeme značit indexem 0. Na počátku, neboli před jakýmkoli přeléváním, platí

$$x_0^0 = 1\,,$$
$$x_0^j = 0 \quad \forall j > 0\,.$$

Ještě pro jistotu vysvětlíme konvenci, kterou při značení používáme. Máme třináct vektorů $\mathbf{x}$, a to od $\mathbf{x}_0$ pro počáteční stav až po $\mathbf{x}_{12}$ pro koncový stav. Každý z nich má třináct nezávislých složek, ke kterým přistupujeme pomocí horního indexu (ano, skutečně se nejedná o mocnění). Objekt x_i^j je j-tá složka vektoru $\mathbf{x}_i$, čili je to už jenom číslo.

Budeme postupovat indukcí. Po $i-1$ krocích jsme ve stavu $\mathbf{x}_{i-1}$. Vezmeme objem $V = kV_0$ ze 13. studny, reprezentovaný výrazem $k\mathbf{x}_{i-1}$, a nalijeme ho do i-té studny. Ta je zatím plná i-té kapaliny, čili složení této studny můžeme popsat vektorem $\mathbf{e}_i$, což je i-tý jednotkový vektor (hodnota na i-té pozici je 1, hodnoty všech ostatních pozic jsou 0). Po smíchání původní kapaliny a nově přilité směsi ze 13. studny dostaneme směs $\mathbf{e}_i + k\mathbf{x}_{i-1}$.

Ta má objem $V' = V + V_0 = (1+k)\,V_0$, ze kterého nyní opět odebereme objem

$$V = kV_0 = \frac{k}{1+k}V' \,.$$

Do 13. studny tak nalijeme kapalinu, které odpovídá výraz

$$\frac{k}{1+k}\left(\mathbf{e}_i + k\mathbf{x}_{i-1}\right) \,.$$

Před tímto krokem v ní byla $\mathbf{x}_{i-1}$, po odebrání objemu kV_0 v ní zbylo $(1-k)\,\mathbf{x}_{i-1}$ a my jsme do ní nyní přilili výraz výše. Celkem v ní tedy bude

$$\mathbf{x}_i = (1-k)\,\mathbf{x}_{i-1} + \frac{k}{1+k}\left(\mathbf{e}_i + k\mathbf{x}_{i-1}\right) = \frac{\mathbf{x}_{i-1} + k\mathbf{e}_i}{1+k} \,.$$

Tím jsme spočítali, jak se změní složení 13. studny po jednom kroku. Víceméně se jednalo jen o triviální aplikaci směšovací rovnice, nicméně jsme při tom pracovali s třinácti složkami naráz. Použité značení se tak možná zdá trochu složité, ale to je daní za to, že počítáme zcela obecně. Na druhou stranu teď máme k dispozici předpis, který platí od začátku do konce rituálu.

Všimněme si, že i-tý krok je první a poslední událostí, ve které do 13. studny přibyde i-tá kapalina. Její koncentrace se už jen každým dalším krokem zmenší $(1+k)$-krát. Můžeme tak psát finální složení 13. studny

$$\mathbf{x}_{12} = \frac{\mathbf{e}_0}{(1+k)^{12}} + \frac{k}{1+k}\sum_{j=1}^{12}\frac{1}{(1+k)^{12-j}}\mathbf{e}_j \,.$$

V zadání se nás ptají na součin objemových zlomků jednotlivých kapalin, neboli na součin výrazů před jednotkovými vektory $\mathbf{e}$ v rovnici výše. Označíme-li výsledek této úlohy P, platí

$$P = \frac{1}{(1+k)^{12}} \cdot \left(\frac{k}{1+k}\right)^{12} \cdot \prod_{j=1}^{12}\frac{1}{(1+k)^{12-j}} = \frac{k^{12}}{(1+k)^{24}} \cdot \prod_{j=0}^{11}\frac{1}{(1+k)^{j}} =$$
$$= \frac{k^{12}}{(1+k)^{90}} = V^{12}V_0^{78}\left(V+V_0\right)^{-90} \doteq 5{,}45 \cdot 10^{-17} \,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha FF ... vařící

Mikuláš má studnu, ale nechce se mu z ní tahat vodu ručně. Pořídil si proto čerpadlo s elektrickým motorem, jehož účinnost η nezávisí ani na napětí, ani na proudu. Od jaké nejmenší hloubky studny by pro něj bylo energeticky výhodnější vodu přeměňovat na páru místo toho, *aby ji normálně čerpal? Její počáteční teplota je T a k vaření slouží odporová spirála s odporem R. Celková délková rezistivita elektrického vedení, které spirálu spojuje se zdrojem napětí na povrchu, je λ. Očekáváme obecný výsledek, ve kterém mohou figurovat všechny veličiny uvedené v zadání a obecně známé fyzikální konstanty.*

Jáchym si vzpomněl na úlohu DA z 11. ročníku FYKOSího Fyziklání.

Hloubku studny označme h, potom budou mít přívodní kabely odpor $h\lambda$. Dohromady se spirálou tak vytvoří jednoduchý lineární obvod s odpory a zdrojem. Jelikož chceme h minimální, napětí na zdroji U zvolíme tak, aby byl ohřev co nejúčinnější. Proud obvodem bude

$$I = \frac{U}{R + h\lambda}\,,$$

potom tepelný výkon drátu vychází

$$P_{\mathrm{d}} = U_R I = RI^2 = \frac{R}{(R + h\lambda)^2} U^2\,.$$

Odpovídají výkon motoru by v tom případě byl

$$P_{\mathrm{m}} = \eta UI = \eta UI = \eta \frac{1}{R + h\lambda} U^2 = \eta \frac{R + h\lambda}{R} P_{\mathrm{d}}\,.$$

Nyní musíme tyto hodnoty přepočítat na hmotnost vody, kterou přesuneme nahoru. V případě čerpadla je to snadné, potenciální energie v tíhovém poli je mgh, čili pro hmotnostní tok platí

$$q_{\mathrm{m}} = \frac{P_{\mathrm{m}}}{gh}\,.$$

Pokud vodu vaříme, musíme jí dodat energii $m\left(c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}\right)$, kde T_{v} je teplota varu vody, c je měrná tepelná kapacita a l_{v} je měrné skupenské teplo. Celkově tak dostáváme

$$q_{\mathrm{d}} = \frac{P_{\mathrm{d}}}{c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}}\,.$$

Nás zajímá, kdy je průtok vody, který získáme vařením, větší. Tomu odpovídá podmínka $q_{\mathrm{d}} \geq q_{\mathrm{m}}$, neboli

$$\frac{P_{\mathrm{d}}}{c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}} \geq \frac{P_{\mathrm{m}}}{gh}\,,$$

$$\frac{Rg}{\eta\left(c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}\right)} \frac{h}{R + h\lambda} \geq 1\,.$$

Vidíme, že výraz nalevo je rostoucí funkce procházející počátkem. Z toho vyplývá, že rovnost nastane pro nejvýše jednu hodnotu h_0, přičemž pro všechny možné $h > h_0$ bude podmínka výše splněna. Nakonec jen vyjádříme výsledek

$$h_0 = \frac{R\eta\left(c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}\right)}{Rg - \lambda\eta\left(c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}\right)} = \left(\frac{g}{\eta\left(c\left(T_{\mathrm{v}} - T\right) + l_{\mathrm{v}}\right)} - \frac{\lambda}{R}\right)^{-1}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FG ... inverzní studna

Jáchym má inverzní studnu. Voda se do ní neustále dolévá, místo aby se z ní čerpala, a to s konstantním hmotnostním průtokem $q = 17{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}min^{-1}}$ *v proudu s kruhovým průřezem. Od jaké hloubky bude proud vody nestabilní a začne se trhat na kapky o poloměru* $r = 2{,}5\,\mathrm{mm}$*? Rychlost vody na vrchu studny je zanedbatelně malá, odpor vzduchu neuvažujte.*

Jáchym má rád takové alternativní studny.

Příroda se vždy snaží minimalizovat celkovou energii systému. Kapky se vytvoří ve chvíli, kdy budou mít menší povrchovou energii než proud vody. Povrchová energie je přímo úměrná povrchu, takže nám stačí minimalizovat povrch. Kapka s poloměrem r má povrch $S_\mathrm{k} = 4\pi r^2$. Této kapce odpovídá část proudu se stejným objemem. Tu aproximujeme válcem s výškou h a s obsahem průřezu S. Z podmínky stejného objmu plyne

$$hS = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Obě podstavy válce sousedí s další vodou v proudu, takže povrchovou energii bude mít jen plášť. Jeho obsah bude

$$S_\mathrm{v} = 2\sqrt{\pi S}h = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{S}}r^3\,.$$

Pro $S_\mathrm{k} < S_\mathrm{v}$ budou kapky energeticky výhodnější než proud. Pro mezní případ dostáváme

$$4\pi r^2 = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi}{S}}r^3\,,$$

$$S = \frac{4\pi}{9}r^2\,.$$

Nyní už známe obsah průřezu proudu, v jakém se rozdělí na kapky. Zbývá spočítat, v jaké hloubce k tomu dojde. Voda padá rovnoměrně zrychleně, takže za čas t urazí vzdálenost

$$x = \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Pro rychlost v čase t platí $v = gt$. Obsah průřezu S je spolu s rychlostí a objemovým průtokem svázán vztahem $vS = q_V = q/\varrho$, kde ϱ je hustota vody. Kombinací všech těchto rovnic dostáváme

$$x = \frac{v^2}{2g} = \frac{q^2}{2g\varrho^2 S^2} = \frac{81q^2}{32\pi^2 g\varrho^2 r^4} \doteq 54\,\mathrm{m}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FH ... samozřejmě, že je pitná

Jáchym má studnu, ze které neustále čerpá vodu s objemovým průtokem $q_V = 0{,}2\,\mathrm{l{\cdot}s^{-1}}$*. Voda se do studně sama doplňuje, čili celkový objem zůstává na hodnotě* $V = 68\,\mathrm{m^3}$*. Jednou však Jáchymovi spadl do studny kus radioaktivního chleba, který se v ní dokonale rozptýlil. Chleba obsahoval* $3{,}0\cdot 10^{15}$ *radioaktivních izotopů s poločasem rozpadu* $T = 69\,\mathrm{hod}$*. Jáchym se to rozhodl ignorovat a dál pokračoval v čerpání vody stejným způsobem. Za jak dlouho klesne aktivita studně pod hodnotu* $A = 1\,900\,\mathrm{s^{-1}}$*?*

Původně to měla být úloha o Dančiných vlasech, ale pak Jáchyma napadlo přepsat to na studnu.

Radioaktivní rozpad se řídí rovnicí

$$N_\mathrm{r} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{r} t}\,,$$

kde N_0 je počet částic na začátku a $\lambda_\mathrm{r} = \frac{\ln 2}{T}$ je rozpadová konstanta. Počet částic, které se rozpadnou za čas $\mathrm{d}t$, tak bude

$$-\mathrm{d}N_\mathrm{r} = -\dot{N}_\mathrm{r}\mathrm{d}t = \lambda_\mathrm{r} N_0 \mathrm{e}^{-\lambda_\mathrm{r} t}\mathrm{d}t = \lambda_\mathrm{r} N \mathrm{d}t\,.$$

Nicméně v našem případě částice mizí ještě jiným způsobem – roztok ve studni je neustále ředěn čistou vodou, která nahrazuje odčerpanou vodu. Za čas $\mathrm{d}t$ se ve studni obmění množství vody úměrné $q_V \mathrm{d}t$. Množství radioaktivních částic, které díky tomu opustí studnu, bude

$$\frac{q_V \mathrm{d}t}{V} N = -\mathrm{d}N_\mathrm{v}\,.$$

Nyní můžeme napsat rovnici, která už správně popisuje změnu počtu radioaktivních částic

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}N_\mathrm{r} + \mathrm{d}N_\mathrm{v} = -\left(\lambda_\mathrm{r} + \frac{q_V}{V}\right) N \mathrm{d}t = -\lambda N \mathrm{d}t\,.$$

Vidíme, že počet částic ve studni bude opět exponenciála, ovšem s jinou rozpadovou konstantou. Aktivita se spočítá jako $A = \lambda_\mathrm{r} N$, neboli

$$A = \lambda_\mathrm{r} N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

Odtud si už snadno vyjádříme hledaný čas jako

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A}{\lambda_\mathrm{r} N_0}\right) = \frac{1}{\frac{\ln 2}{T} + \frac{q_V}{V}} \ln\left(\frac{N_0}{A}\frac{\ln 2}{T}\right) \doteq 740\,\mathrm{hod}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha GA ... děravá

Dodo má studnu s vědrem, které má tvar válce s výškou $h_0 = 32\,\mathrm{cm}$ a s poloměrem $r = 12\,\mathrm{cm}$, přičemž má hmotnost $m = 2{,}7\,\mathrm{kg}$. Na dně vědra je díra s obsahem průřezu $S = 1{,}0\,\mathrm{cm}^2$. Dodo vědro vytahuje z hloubky $H = 25\,\mathrm{m}$ nahoru konstantní rychlostí $v = 0{,}40\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kolikrát je tento postup méně účinný, než kdyby vědro nebylo děravé? Ptáme se na podíl práce, kterou Dodo vykoná na vytažení jednotkového množství vody v obou zmíněných případech.

Jáchym jedl polévku vidličkou.

Voda z vědra vytéká rychlostí $\sqrt{2hg}$, kde h je aktuální výška hladiny. Objemový průtok bude $q = S\sqrt{2hg}$, což můžeme také napsat jako $-\dot{V}$, kde $V = \pi r^2 h$ je objem vody ve vědru. Dostáváme rovnici

$$\pi r^2 \dot{h} = -S\sqrt{2hg}\,,$$

jejímž řešením je

$$h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{S}{\pi r^2}\sqrt{\frac{g}{2}}t\right)^2\,.$$

Čas, po který Dodo vytahuje vědro, spočítáme jednoduše jako

$$\tau = \frac{H}{v} .$$

Dosazením $t = \tau$ do předchozí rovnice ověříme, že během cesty nahoru nestihne veškerá voda vytéct a zjistíme výšku vody v děravém vědře, když ho Dodo vytáhne, $h_1 = 6{,}75\,\mathrm{cm}$.

Celková hmotnost vědra s vodou je $m + \pi r^2 h$. Odtud pro sílu, kterou musí Dodo táhnout, dostáváme

$$F = \left(m + \pi r^2 h\varrho\right) g .$$

Výkon potom bude $P = Fv$. Práce je integrál výkonu přes čas, neboli

$$W_1 = \int_0^\tau P\,\mathrm{d}t = mgv\tau + \pi r^2 \varrho g v \int_0^\tau h(t)\,\mathrm{d}t = mgv\tau + \pi r^2 \varrho g v \left(-\frac{\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{2}{g}}\right)\frac{1}{3}\left[h^{\frac{3}{2}}(t)\right]_0^\tau =$$
$$= mgH + \frac{\pi^2 r^4 \varrho v \sqrt{2g}}{3S}\left(h_0^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right) = 2{,}638\,\mathrm{kJ} .$$

Výsledný objem vody, který Dodo dopraví nahoru, bude $V_1 = \pi r^2 h_1$.

Ve druhém případě je situace výrazně jednodušší – síla bude stále stejná, čili práci spočítáme jako

$$W_2 = \left(m + \pi r^2 h_0 \varrho\right) gH = 4{,}211\,\mathrm{kJ} .$$

Objem vody bude také pořád stejný, konkrétně $V_2 = \pi r^2 h_0$.

Výsledkem úlohy je poměr

$$\frac{W_1}{V_1}\frac{V_2}{W_2} = \frac{W_1}{W_2}\frac{h_0}{h_1} \doteq 2{,}97 .$$

Kdyby si Dodo koupil nové vědro, byl by při čerpání vody ze studny skoro třikrát účinnější.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha GB ... zbytkové teplo

Geotermální energie pochází z rozpadu radioaktivních prvků, ze slapových deformací Země a ze zbytkového tepla uvolněného při diferenciaci Země. Země má hmotnost $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a poloměr $R = 6{,}38 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. Předpokládejte, že na počátku existence byla Země homogenní koule. Po diferenciaci se v nitru utvořilo kovové (převážně železné) jádro o poloměru $r_\mathrm{j} = 3{,}50 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ a hustotě $\varrho_\mathrm{j} = 13\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Zbytek Země tvoří plášť, u nějž taktéž předpokládejme konstantní hustotu. Jaké teplo se uvolnilo při diferenciaci? *Jindru pálila chodidla.*

V zadání bylo řečeno, že máme předpokládat homogenní hustotu zemského pláště. Ze všeho nejdřív ji ale musíme spočítat. Objem kulové vrstvy o vnitřním poloměru r_1 a vnějším poloměru r_2 je

$$V_\mathrm{sl} = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right) .$$

Zemský plášť je kulová vrstva o vnitřním poloměru $r_1 = r_\mathrm{j} = 3{,}50 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$ a vnějším poloměru $r_2 = R = 6{,}38 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. Celá Země má hmotnost $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Hmotnost zemského jádra můžeme spočítat z jeho rozměrů a hustoty jako

$$M_\mathrm{j} = \frac{4}{3}\pi r_j^3 \varrho_\mathrm{j} = 2{,}335 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}.$$

Průměrnou hustotu zemského pláště ϱ_p pak můžeme vyjádřit

$$\varrho_\mathrm{p} = \frac{M - M_\mathrm{j}}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r_\mathrm{j}^3\right)},$$
$$\varrho_\mathrm{p} = 4{,}003 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}.$$

Nyní přejdeme k výpočtu energie. Na počátku je Země homogenní koule, takže její gravitační potenciální energie je

$$E_1 = -\frac{3GM^2}{5R},$$
$$E_1 = -2{,}237 \cdot 10^{32}\,\mathrm{J}.$$

Po diferenciaci se Země rozdělí na oblast jádra a oblast pláště. Její potenciální energie se rovná součtu potenciální energie jádra a potenciální energie pláště. Podle slupkového teorému se gravitační síly působící na hmotný bod uvnitř homogenní kulové slupky navzájem vyruší. Na hmotu nacházející se ve vzdálenosti r od středu Země tak působí gravitační síla pouze od hmoty nacházející se pod poloměrem r. Jinými slovy, potenciální energie zemského jádra E_j není ovlivněna přítomností pláště a spočítá se jako

$$E_\mathrm{j} = -\frac{3GM_\mathrm{j}^2}{5r_\mathrm{j}} = -6{,}237 \cdot 10^{31}\,\mathrm{J}.$$

Potenciální energii zemského pláště spočítáme pomocí integrálu. Budeme to dělat tak, že na zemské jádro budeme pomyslně postupně přikládat vrstvy zemského pláště, dokud nepostavíme celou Zemi. Představme si, že už jsme vytvořili zárodek Země o poloměru $r > r_\mathrm{j}$. To znamená, že uprostřed se nachází jádro a nad ním je vrstva pláště vysoká $r - r_\mathrm{j}$. Pokud na povrch této koule přineseme z nekonečna infinitezimálně tenkou kulovou slupku o hmotnosti $\mathrm{d}m$, potenciální energie se změní o

$$\mathrm{d}E = -\frac{G\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{j}^3\varrho_\mathrm{j}\mathrm{d}m}{r} - \frac{G\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_\mathrm{j}^3\right)\varrho_\mathrm{p}\mathrm{d}m}{r}.$$

Do tohoto vztahu můžeme dosadit $\mathrm{d}m = 4\pi\varrho_\mathrm{p}r^2\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}E = -\frac{16}{3}G\pi^2r_\mathrm{j}^3\varrho_\mathrm{j}\varrho_\mathrm{p}r\mathrm{d}r - \frac{16}{3}G\pi^2\left(r^3 - r_\mathrm{j}^3\right)\varrho_\mathrm{p}^2r\mathrm{d}r,$$
$$\mathrm{d}E = \frac{16}{3}G\pi^2r_\mathrm{j}^3\varrho_\mathrm{p}\left(\varrho_\mathrm{p} - \varrho_\mathrm{j}\right)r\mathrm{d}r - \frac{16}{3}G\pi^2\varrho_\mathrm{p}^2r^4\mathrm{d}r\,.$$

Jelikož zemský plášť se rozléhá mezi poloměry r_j a R, jeho gravitační potenciální energii spočítáme jako

$$E_\mathrm{p} = \frac{16}{3}G\pi^2r_\mathrm{j}^3\varrho_\mathrm{p}\left(\varrho_\mathrm{p} - \varrho_\mathrm{j}\right)\int_{r_\mathrm{j}}^{R} r\mathrm{d}r - \frac{16}{3}G\pi^2\varrho_\mathrm{p}^2\int_{r_\mathrm{j}}^{R} r^4\mathrm{d}r,$$
$$E_\mathrm{p} = \frac{8}{3}G\pi^2r_\mathrm{j}^3\varrho_\mathrm{p}\left(\varrho_\mathrm{p} - \varrho_\mathrm{j}\right)\left(R^2 - r_\mathrm{j}^2\right) - \frac{16}{15}G\pi^2\varrho_\mathrm{p}^2\left(R^5 - r_\mathrm{j}^5\right),$$
$$E_\mathrm{p} = -1{,}903 \cdot 10^{32}\,\mathrm{J}.$$

Celková potenciální energie Země po diferenciaci E_2 je součtem potenciální energie jádra E_j a potenciální energie pláště E_p

$$E_2 = E_\mathrm{j} + E_\mathrm{p} = -2{,}526 \cdot 10^{32}\,\mathrm{J}.$$

Při svém vzniku měla Země větší potenciální energii než po následné diferenciaci. Teplo Q uvolněné při diferenciaci je jejich rozdíl

$$Q = E_1 - E_2 = 2{,}9 \cdot 10^{31}\,\mathrm{J}.$$

Při diferenciaci Země se uvolnilo teplo $2{,}9 \cdot 10^{31}$ J, což odpovídá „výhřevnosti“ $5\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha GC ... paprsky jdoucí po parabole

Vaší úlohou je najít závislost indexu lomu na výšce y, pokud chceme, aby se paprsky v atmosféře pohybovaly po parabole $y = x^2$. Zakřivení Země zanedbejte. *Jurčo chce vidět do strany.*

Zo Snellovho zákona si uvedomíme, že index lomu bude s výškou narastať. Materiál (atmosféru) môžeme rozdeliť na tenké vodorovné vrstvy s konštantným indexom lomu. Lúč sa pri prechode do vyššej vrstvy odkloní o malý uhol $\mathrm{d}\vartheta$. Pre dve susedné vrstvy atmosféry vieme napísať Snellov zákon ako

$$(n + \mathrm{d}n)\sin(\vartheta + \mathrm{d}\vartheta) = n\sin\vartheta\,,$$
$$n\sin\vartheta + n\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta + \mathrm{d}n\sin\vartheta = n\sin\vartheta\,,$$

z čoho máme

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = -\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta}\,.$$

Tangens uhla medzi lúčom a zvislicou získame zo smernice dotyčnice paraboly $y = x^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x = \operatorname{tg}(\pi/2 - \vartheta) = \operatorname{cotg}\vartheta = \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}\,.$$

Ďalšou diferenciáciou tohto vzťahu získame vzťah medzi $\mathrm{d}\vartheta$ a $\mathrm{d}x$

$$2\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin^2\vartheta}\,,$$

kde sínus na druhú vieme vyjadriť ako

$$\sin^2\vartheta = \frac{1}{\operatorname{cotg}^2\vartheta + 1}$$
$$\sin^2\vartheta = \frac{1}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4y + 1}\,.$$

Po dosadení $\sin^2\vartheta$ a $d\vartheta$ do našej podoby Snellovho zákona máme

$$\frac{\mathrm{d}n}{n} = \frac{1}{2}\frac{4\mathrm{d}y}{4y+1}\,,$$

odkiaľ dostaneme výslednú závislosť

$$n = n_0\sqrt{\frac{4y+1}{4y_0+1}}\,.$$

Róbert Jurčo
robert.jurco@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.