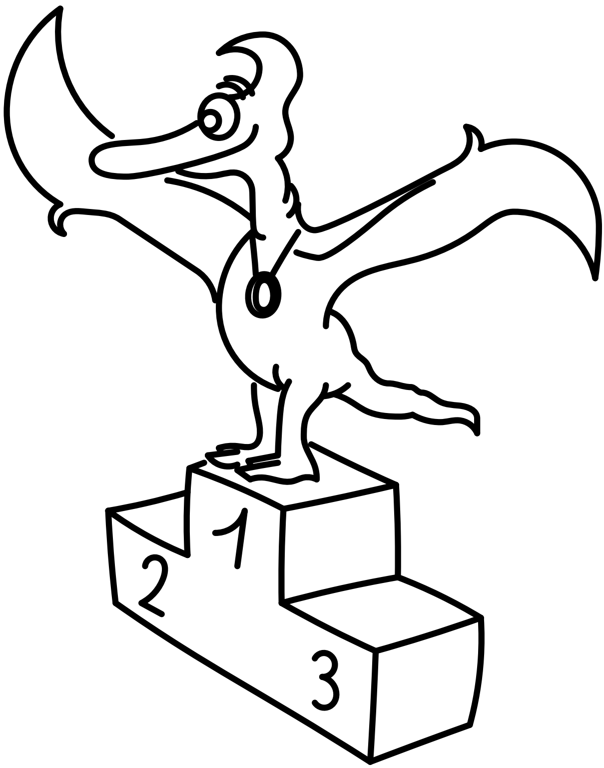
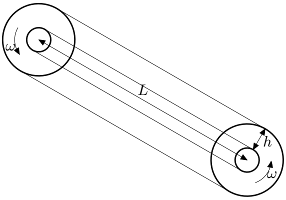
Řešení úloh 13. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha AA ... podivnost eskalátoru



Určitě jste si již všimli, že pás na eskalátoru, sloužící k držení, má častokrát jinou rychlost než schody. Uvažujme zjednodušený model, kde jsou pás a schody na koncích připevněné na souosé válce (tak, že neprokluzují), které se otáčejí stejnou úhlovou rychlostí $\omega = 0{,}36\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ a poloměr vnitřního válce je $r_1 = 1{,}2\,\mathrm{m}$. Určete poměr rychlosti pásu k rychlosti schodů, má-li náš model eskalátoru délku $l = 32\,\mathrm{m}$ a vzdálenost mezi schody a pásem je $h = 0{,}6\,\mathrm{m}$. *Dodovi nějak utíkala ruka.*

Poloměr válce, na kterém se otáčí pás, je zřejmě $r_2 = r_1 + h$. Mezi rychlostí a úhlovou rychlostí platí pri otáčivém pohybu vztah $v = \omega r$. Pro poměr rychlostí tak dostáváme

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega r_2}{\omega r_1} = \frac{r_1 + h}{r_1} = \frac{3}{2}\,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha AB ... daleko od planety

O kolik procent si dopravní letadla prodlužují svoji cestu tím, že létají ve výšce cca v $H = 11\,\mathrm{km}$ nad střední hladinou moře vůči tomu, kdyby létala těsně nad mořskou hladinou? Uvažujte pouze úseky, kdy již má letadlo nastoupanou danou výšku. Poloměr Země má všude stejnou hodnotu $R_\mathrm{Z} = 6\,373\,\mathrm{km}$. *Karel se zamýšlel nad leteckou dopravou.*

Pokud se chceme dostat z bodu A do bodu B a chceme srovnat poměr vzdálenosti v nulové nadmořské výšce a ve výšce H, pak nebudeme potřebovat ani znát vzdálenost těchto bodů. Letadlo totiž urazí stejný úhel ϑ vůči středu Země. Mohli bychom psát, že pro poměr dráhy s_H ve výšce H a s_0 při hladině moře platí

$$K = \frac{s_H}{s_0} = \frac{(R_\mathrm{Z} + H)\,\vartheta}{R_\mathrm{Z}\vartheta} = \frac{R_\mathrm{Z} + H}{R_\mathrm{Z}} = 1 + \frac{H}{R_\mathrm{Z}} \doteq 1{,}0017\,.$$

Tím jsme dostali poměry obou drah. Dotaz byl na to, o kolik se dráha prodlouží. Tento údaj získáme odečtením jedničky od K, tedy dráhy letadel jsou o $\Delta = K - 1 = 0{,}17\,\%$ delší. To je vzhledem k jiným efektům, kvůli kterým např. vzroste či klesne rychlost letu či jeho spotřeba paliva, zcela jistě zanedbatelné.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AC ... to jiskří

V jaké vzdálenosti d se musí nacházet sběrač lokomotivy od elektrického vedení, aby došlo k výboji? Stejnosměrné napětí ve vodiči vůči kolejím je $U = 3\,\mathrm{kV}$. Elektrická pevnost vzduchu, tedy průměrná intenzita elektrického pole podél nejkratší spojnice vodičů, při které dojde k výboji, je $E = 3{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-1}{\cdot}s^{-3}}$. Relativní permitivitu a permeabilitu vzduchu položte rovnu jedné. *Dodo přemýšlel po dlouhé cestě domů.*

Medzi intenzitou homogénneho elektrického poľa a napätím platí jednoduchý vzťah

$$U = Ed\,,$$

kde d je vzdialenosť medzi miestami, kde určujeme napätie, v smere elektrického poľa. V našom prípade pole nie je homogénne, no môžeme čakať, že hľadaná vzdialenosť bude veľmi malá a teda pole sa nebude výrazne meniť. Potom stačí aproximovať el. pole ako homogénne s rovnakou priemernou hodnotou. Použijeme preto práve tento vzorček a dostaneme

$$d = \frac{U}{E} = 1\,\mathrm{mm}\,.$$

Môžeme vidieť, že d je skutočne veľmi malé, teda náš odhad je zrejme správny.

Na záver sa môžete zamyslieť, ako by sa úloha skomplikovala, ak by sme ju chceli rátať presne. V prvom rade potrebujeme vedieť tvar zberača (a vedenia). Lokomotíva sa ale aj pohybuje, čo indukuje pohyb náboja vo vodiči a všeobecne elektromagnetické pole. Elektrická pevnosť tiež nie je typicky definovaná ako priemerná intenzita, ale ako intenzita homogénneho statického poľa a to práve kvôli tomu, že takto zložitú situáciu nevieme popísať jednou konštantou a nie je jasné, aký priemer uvažovať. Tu máme šťastie, lebo môžeme odhadnúť pole homogénnym.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha AD ... pozor, tramvaj

Stojíme u rovných kolejí. Chceme přes ně přejít, proto se nejdříve podíváme doleva. Nic tam nejede. Když se podíváme vpravo, vidíme tramvaj, která se k nám blíží konstantní rychlostí v. Poté se opět podíváme doleva. Vidíme protijedoucí tramvaj, která se k nám blíží konstantní rychlostí u. V jejím rovném čelním skle si všimneme odraz první tramvaje. Jakou rychlostí se k nám tento odraz přibližuje? *Cestou na tělák se Dodo nudil.*

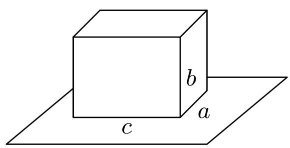
Riešenie úlohy rýchlo nájdeme nasledujúcou úvahou. Čelné sklo druhej električky sa k nám blíži rýchlosťou u. Ak by sme v ňom videli náš odraz, zrejme by sa k nám blížil rýchlosťou $2u$. Preto sa odraz prvej električky k nám bude približovať rýchlosťou $2u + v$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha AE ... nestabilní Danka

Mějme kvádr o rozměrech $a = 20\,\mathrm{cm}$, $b = 30\,\mathrm{cm}$ a $c = 50\,\mathrm{cm}$ a hustotě $\varrho = 620\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Kvádr je v homogenním gravitačním poli položen na poličce, která visí na stěně a má rozměry a a c. Jaká je jeho stabilita? Stabilitou se myslí minimální množství energie, která je potřeba dodat kvádru, aby se převrhl.

Dance padaly věci.



Ľahkou úvahou nahliadneme, že výhodnejšie je káder prevalit cez hranu c, keďže hrana a je kratšia, a preto bude ľahšie zdvihnúť ťažisko tak, aby se preklopil cez hranu c. Stačí teda dostať jeho ťažisko nad hranu c a trochu za ňu. Táto zmena polohy ťažiska vyžaduje zvýšiť potenciálnu energiu kvádra. Tú môžeme počítať ako zmenu potenciálnej energie ťažiska. Položíme nulovú hladinu potenciálnej energie na úroveň podložky. Na začiatku má kváder potenciálnu energiu

$$E_{p1} = \varrho abcg\frac{b}{2}\,.$$

Keď sa jeho ťažisko bude nachádzať nad hranou c, bude vo výške h nad podložkou, pričom

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Vtedy bude mať potenciálnu energiu

$$E_{p2} = \varrho abch\,.$$

Stabilita je rozdiel týchto dvoch energií, teda

$$\Delta E = E_{p2} - E_{p1}\,,$$
$$\Delta E = \frac{1}{2}\varrho gabc(\sqrt{a^2 + b^2} - b)\,,$$
$$\Delta E \doteq 5{,}52\,\mathrm{J}\,.$$

Stabilita kvádra je teda 5,52 J.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha AF ... zeměplochá

Jak všichni dobře víme, Země je placka, kterou na zádech nesou sloni. Nad ní je pak klenba, na které jsou zavěšené Slunce, stálice i Měsíc. Pokud bychom k upevnění Měsíce o hmotnosti $7{,}348\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ *použili ocelové lano kruhového průřezu, jaký průměr by muselo mít, chceme-li mít* $10\,\%$ *rezervu (lano by nemělo prasknout při zvýšení hmotnosti o* $10\,\%$*)? Mez pevnosti v tahu oceli je* $700\,\mathrm{MPa}$*. Měsíc je v konstantním gravitačním zrychlení o hodnotě* g*. Hmotnost lana zanedbejte.* *Mikuláš má slabost pro Terryho, Terryho Pratchetta.*

Řešení získáme kombinací vztahů pro (mechanické) napětí $\sigma = F/S$, pro tíhovou sílu $F = mg$ a pro obsah kruhu $S = \pi d^2/4$. Ze získaného vztahu

$$\sigma_{\max} = \frac{4\cdot 1{,}1mg}{\pi d^2}$$

vyjádřením průměru d získáme finální vztah

$$d = 2\sqrt{\frac{1{,}1\,mg}{\pi\sigma_{\max}}}\,.$$

Dosazením pak získáme pro průměr lana hodnotu $d = 38\,000\,\mathrm{km}$. To je několikanásobek průměru nejen Měsíce, ale i Země, z čehož můžeme soudit, že vysvětlení nebeské oblohy pomocí ohromných koulí horniny letících Vesmírem nelze úplně zavrhovat.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

Úloha AG ... pražské metro

Na jednom pohybujícím se eskalátoru trvá cestujícímu vyběhnout nahoru a znovu sestoupat dolů čas t_z, na nepohybujícím se eskalátoru je to čas t_v ($t_\mathrm{v} < t_\mathrm{z}$). Jaká je rychlost pohybu schodů zapnutého eskalátoru, pokud po nich cestující jde rychlostí v_c?

Legolas běhá po eskalátorech v metru.

Vieme zistiť dĺžku eskalátora z prípadu, keď je vypnutý. Vtedy ho cestujúci celý prejde 2-krát

$$l_\mathrm{e} = \frac{1}{2} v_\mathrm{c} t_\mathrm{v} \,.$$

Zostáva teda zostaviť rovnicu

$$\begin{aligned} t_\mathrm{z} &= t_1 + t_2 \,, \\ t_\mathrm{z} &= \frac{l_\mathrm{e}}{v_\mathrm{c} + v_\mathrm{e}} + \frac{l_\mathrm{e}}{v_\mathrm{c} - v_\mathrm{e}} \,, \\ \frac{t_\mathrm{z}}{v_\mathrm{c} t_\mathrm{v}} &= \frac{v_\mathrm{c}}{v_\mathrm{c}^2 - v_\mathrm{e}^2} \,. \end{aligned}$$

Jediná neznáma je v_e, vyjadríme ju a hotovo

$$v_\mathrm{e} = v_\mathrm{c} \sqrt{1 - \frac{t_\mathrm{v}}{t_\mathrm{z}}} \,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha AH ... předponová

Prvních osm písmen abecedy seřaďte jako předpony soustavy jednotek SI sestupně podle velikosti (od největší po nejmenší). Dbejte na používání velkých a malých písmen. Pokud dané písmeno není předponou (ani malé ani velké), nepoužívejte ho. Pokud je předponou jako malé i velké, v seřazení použijte obě. *Dodo se učí abecedu.*

Z písmen a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E, F, G, H tvoria predpony SI sústavy jednotiek a, c, d, E, f, G, h, čo sú predpony atto $= \cdot 10^{-18}$, centi $= \cdot 10^{-2}$, deci $= \cdot 10^{-1}$, exa $= \cdot 10^{+18}$, femto $= \cdot 10^{-15}$, giga $= \cdot 10^{9}$, hekto $= \cdot 10^{2}$. Správne poradie je teda E, G, h, d, c, f, a.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha BA ... nehoda při přistání

Část přístrojů pro leteckou navigaci spoléhá na tlak vzduchu. Zaměřme se nyní na výškoměr, který udává výšku letadla nad střední hladinou moře v závislosti na statickém tlaku okolního vzduchu. Pro jeho správnou funkčnost je potřeba vždy nastavit tlak na letišti přepočtený na střední hladinu moře. Pro určení výšky v blízkosti hladiny moře pak můžeme s dostatečnou přesností předpokládat, že vystoupání o $\Delta h = 8{,}0\,\mathrm{m}$ odpovídá poklesu tlaku o $\Delta p = 1{,}0\,\mathrm{hPa}$. Pokud omylem pilot nastaví do svého přístroje místo skutečného aktuálního tlaku přepočteného na hladinu moře $p_\mathrm{r} = 1\,012\,\mathrm{hPa}$ špatnou hodnotu $p_\mathrm{err} = 1\,021\,\mathrm{hPa}$, jak vysoko nad střední hladinou moře bude, pokud mu výškoměr ukazuje $450\,\mathrm{m}$? *Karel se učil o důležitosti QNH.*

Ze zadání víme, že změnu výšky se změnou tlaku si můžeme zapsat jako

$$K = -\frac{\Delta h}{\Delta p} = -8{,}0\,\mathrm{m\cdot hPa^{-1}}\,.$$

Rozdíl mezi skutečným a zadaným tlakem je $\Delta P = p_\mathrm{r} - p_\mathrm{err} = -9\,\mathrm{hPa}$. To odpovídá tomu, že si myslí, že je o výšku H výše, kde

$$H = K\Delta P = \frac{\Delta h}{\Delta p}\left(p_\mathrm{r} - p_\mathrm{err}\right) = 72\,\mathrm{m}\,.$$

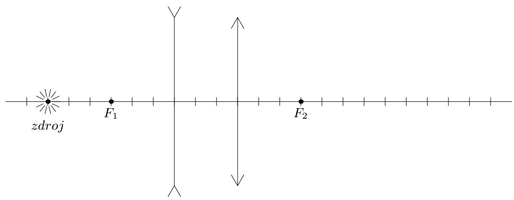
Pokud mu tedy přístroj ukazuje 450 m, pak by byl ve skutečnosti ve výšce 378 m nad střední hladinou moře. Což je docela velký rozdíl, pokud by se například přibližoval k letišti v Praze v Ruzyni, které je ve výšce 380 m. Dalo by se říci, že je to rozdíl mezi životem a smrtí.

Pokud jste trochu zmatení ze znaménkové konvence, tak pro určení, jestli daný rozdíl tlaků bude vést k tomu, že reálná výška je výše či níže, promyslete si, jaké tlaky jsou zadané. Tlak vždy s výškou klesá. Pokud ve výškoměru nastavíme vyšší tlak, než je ten reálný, výškoměr si pak bude myslet, že pod námi musí být vyšší vzduchový sloupec. Protože náš výškoměr zjistí okolní tlak a přepočte ho podle předpokládaného tlaku na střední hladině moře.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BB ... kreslící

Na obrázku vidíte optickou osu, na které je vyznačen bodový zdroj, ohnisko první (rozptylné) čočky, tenká rozptylka, tenká spojná čočka a ohnisko druhé (spojné) čočky. Všechny vzdálenosti jsou trojnásobkem jednotkové délky. Zakreslete do obrázku polohu obrazu zdroje po zobrazení oběma čočkami. Stačí nám, když se trefíte mezi dva správné body na ose. Řešte libovolným způsobem.



Matěj si říkal, že by mohlo být pěkné si během soutěže malovat.

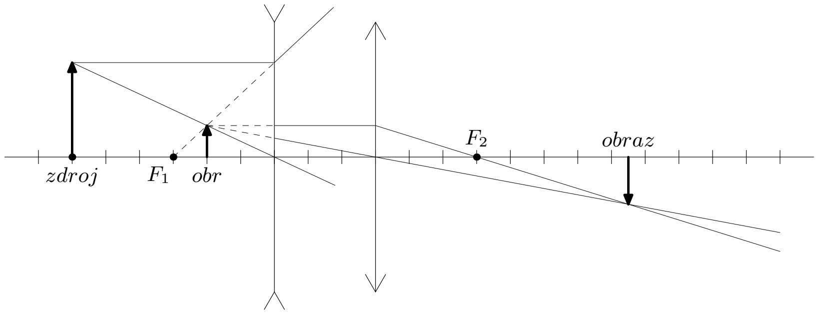
Řešíme obrázkem.

Nebo si můžeme vzdálenosti naměřit (zdroj je ve vzdálenosti 6 před čočkou a ohniskové vzdálenosti jsou -3 a 3) a pomocí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

si můžeme spočítat, že se zobrazí do vzdálenosti 2 před první čočkou (první obraz je označen jako „obr“). Tento obraz pak bude vzdálen 5 od druhé čočky, která ho zobrazí do vzdálenosti 7,5 před sebe.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz



Úloha BC ... zrychlení od planet

Představme si, že máme soustavu dvou homogenních kulových planet. Obě mají hustotu $\varrho = 4\,200\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Menší z nich má poloměr $R = 4{,}20 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a větší má poloměr $R_2 = 2R$. Vzdálenost jejich středů je $r = 16R$. Jaké gravitační zrychlení (velikost a směr) bude působit na prachovou částici umístěnou přesně ve vzdálenosti $x = 8R$ od obou jejich středů?

Karel si hraje s neskutečnými planetárními soustavami.

Gravitační zrychlení udělované předmětu vně sféricky symetrického tělesa ve vzdálenosti x od jeho středu je

$$a_g = G\frac{m}{x^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}$ je gravitační konstanta a m je hmotnost tělesa, které zrychlení uděluje.

V naší úloze máme dvě tělesa, která se pro naše účely liší jenom hmotností. Hmotnost menšího je

$$m_1 = \varrho V_1 = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3\,.$$

Hmotnost závisí na třetí mocnině poloměru a druhé těleso má dvakrát větší poloměr než první těleso. Jeho hmotnost tedy bude $m_2 = 8m_1$.

Gravitační zrychlení působí vždy směrem k tělesu, které ho vyvolává. Pokud si na osu procházející středy obou těles umístíme to lehčí vlevo a to těžší vpravo, pak z principu superpozice dostáváme pro celkové zrychlení (ve směru doprava)

$$a = a_1 + a_2 = -G\frac{m_1}{x^2} + G\frac{m_2}{x^2} = \frac{7Gm_1}{x^2} = \frac{7\pi G\varrho R}{48} \doteq 0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Celkové gravitační zrychlení, které bude působit na prach na ose ve stejné vzdálenosti od středů obou planet, bude $0{,}54\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Směr jeho působení bude přímo od středu menší planety ke středu větší planety.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BD ... pijeme čaj

Mějme válcovou nádobu o výšce h a podstavou o průřezu S, která je naplněná čajem o hustotě ϱ. V boční stěně je na spodku nádoby otvor o průřezu $s \ll S$, ke kterému je připevněná vodorovná *výtoková trubice s kohoutkem a manometrickou trubicí (tj. svislá trubička připojená shora). Určete závislost výšky kapaliny v manometrické trubici $l(t)$ na čase od otevření kohoutku. Předpokládejte, že se tato výška přizpůsobuje poměrům ve výtokové trubici okamžitě a že čaj je ideální kapalina.* *Dodo se zamyslel v menze a zapomněl jíst.*

Rýchlosť kvapaliny vytekajúcej malým otvorom v stene nádoby je $v = \sqrt{2gh}$. Pretlak na dne manometrickej trubice p oproti atmosférickému tlaku určíme pomocou Bernoulliho rovnice ako

$$p = \varrho gh - \frac{1}{2}\varrho v^2 = 0\,\mathrm{Pa}\,.$$

K tomuto záveru sa dalo dospieť aj úvahou, že v prípade ideálnej kvapaliny nie je rozdiel medzi miestom na spodku manometrickej trubice a miestom tesne nad vytekajúcou kvapalinou z kohútika.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha BE ... na dně jezera

O kolik je vyšší tlak na dně Mrtvého moře kvůli tomu, že je slané? Zajímáme se o rozdíl vůči hypotetické situaci, kdy by bylo sladké. Uvažujeme dobu, kdy byla hladina povrchu jezera (Mrtvé moře je jezero, které stále vysychá) $h_0 = 430\,\mathrm{m}$ pod střední hladinou moře a nejhlubší místo jezera bylo o $\Delta h = 298\,\mathrm{m}$ níže. Hustota sladké vody je $\varrho_0 = 997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, kdežto současná hustota jezera je $\varrho = 1\,240\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Uvažujte, že by jezeru po odsolení zůstala stejná hloubka.

Karel se učil něco o tlaku vzduchu.

Údaj o tom, jak hluboko je hladina Mrtvého moře, nebudeme potřebovat. Můžeme totiž uvažovat, že nad touto hladinou je stále stejný vzduch. Tlak se proto změní jenom ve vodním sloupci.

V zadání máme uvedeno, že máme uvažovat, že po odsolení zůstane stejná hloubka jezera. Rozdíl tlaků na dně jezera bude tedy dán rozdílem hydrostatického tlaku ve slané vodě $p_1 = \varrho \Delta h g$ a ve sladké vodě $p_2 = \varrho_0 \Delta h g$, kde g je tíhové zrychlení. Dostáváme tlakový rozdíl

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\varrho - \varrho_0)\,\Delta h g \doteq 710\,\mathrm{kPa}\,.$$

Na dně Mrtvého moře byl v době, kdy hladina odpovídala výpočtu, tlak o 710 kPa vyšší, než by byl, kdyby byla voda sladká (destilovaná). To je rozdíl skoro přesně 7 atmosfér. Je pravdou, že jsme zadali hustotu opravdu čisté vody, ale i sladká voda v přírodě obsahuje nějaké rozpuštěné látky, a proto by reálný rozdíl byl o něco menší.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BF ... mít tak odhad ...

O kolik řádů má viditelný Vesmír větší objem než atom vodíku? Pozorovatelný vesmír má průměr $28{,}5\,\mathrm{Gpc}$ a Van der Waalsův poloměr atomu vodíku je $r = 1{,}2\,\mathrm{Å}$.

Dodovi zase něco nevyšlo.

Po prevedení priemeru Vesmíru na polomer a do základných jednotiek dostaneme $R = 4{,}41 \cdot 10^{26}$ m. Angstróm je $1\,\text{Å} = 1 \cdot 10^{-10}$ m, pre podiel polomerov dostaneme $R/r = 3{,}7 \cdot 10^{36}$. Po zlogaritmovaní máme $\log \frac{r}{r_0} = 36{,}56$. Pre podiel objemov máme

$$\log \frac{V}{V_0} = 3 \log \frac{r}{r_0} = 109{,}68 \approx 110\,.$$

Objem viditeľného Vesmíru je teda o 110 rádov väčší ako objem atómu vodíka.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha BG ... exosoustava s planetou

Představme si, že jsme objevili jinou planetární soustavu, která má podobný vzhled jako ta naše. Místní hvězda má hmotnost $0{,}900 M_\mathrm{S}$ (násobek hmotnosti našeho Slunce). Pokud by planeta podobná Zemi měla stejně dlouhý rok jako Země, jakou vzdálenost od své hvězdy by musela mít? Pro jednoduchost uvažujte, že planety obíhají hvězdu po kružnicích. Výsledek udejte v násobcích au*, tedy střední vzdálenosti středů Země a Slunce.*

Karel přemýšlel nad exoplanetami.

Vyjdeme z toho, že planety obíhají po kružnicích, tedy dostředivá síla F_d se neustále musí rovnat gravitační síle F_g. Jiné síly totiž v naší úloze nepůsobí (vliv dalších planet zjevně zanedbáváme, když nevíme, jak jsou rozmístěné) a planety obíhají svoji hvězdu rovnoměrně (rychlostí v). Pak postupně platí

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g} \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = G\frac{M}{r}\,,$$

kde m je hmotnost planety, M hmotnost hvězdy, G gravitační konstanta a r je vzdálenost planety od středu hvězdy. Dále využijeme vztahu $v = 2\pi r/T$, tedy že oběžná rychlost planety musí odpovídat tomu, že provede jeden oběh za oběžnou dobu T. Dostáváme tak závislost r na další parametrech

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}\,.$$

Zjišťujeme, že poloměr dráhy závisí na gravitačním zrychlení, které je konstantní, dalších konstantách a na hmotnosti hvězdy a oběžné době. Protože se úloha ptala na stejnou délku roku a sníženou hmotnost Slunce, stačí ji dosadit do vztahu a dostaneme poloměr dráhy v násobku poloměru dráhy Země r_Z

$$r = \sqrt[3]{G\frac{0{,}900\,M}{4\pi^2}T^2} \doteq 0{,}965\,r_\mathrm{Z}\,.$$

Poloměr dráhy planety v objevené soustavě by musel být 0,965 au. Tedy při poklesu hmotnosti Slunce o 10 % je potřeba u planety zmenšit poloměr dráhy o 3,5 %.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BH ... cena letu

Letíme dopravním letadlem BAe 146-300/RJ100 a zajímá nás, jestli bude levnější letět nízkou či vysokou rychlostí, když chceme letět $s = 250\,\mathrm{km}$ v letové hladině FL 310. Letadlo má v této letové hladině spotřebu paliva $M_\mathrm{h} = 2\,517\,\mathrm{kg{\cdot}h^{-1}}$ při rychlosti $v_\mathrm{h} = 429\,\mathrm{kn}$. Při rychlosti $v_\mathrm{l} = 377\,\mathrm{kn}$ má ovšem spotřebu $M_\mathrm{l} = 1\,724\,\mathrm{kg{\cdot}h^{-1}}$. Pro který způsob letu bude na námi urażené vzdálenosti s spotřeba nižší a kolik kg paliva ušetříme? Pro přepočet budete potřebovat vědět, že jeden námořní uzel (kn) je $1\,852\,\mathrm{m{\cdot}h^{-1}}$. *Karel se cvičí na řídícího letového provozu.*

Nejprve si převedeme jednotky rychlosti na ty, které se nám budou více hodit, tedy $v_\mathrm{h} = 429\,\mathrm{kn} \doteq 794{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a $v_\mathrm{l} = 377\,\mathrm{kn} \doteq 698{,}2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vzhledem k tomu, že spotřebu máme zadanou v kilogramech na hodinu, musíme si pro každou naši variantu cesty určit její časovou délku, abychom mohli určit celkovou spotřebu varianty

$$t_\mathrm{h} = \frac{s}{v_\mathrm{h}} \doteq 0{,}315\,\mathrm{h}\,, \quad t_\mathrm{l} = \frac{s}{v_\mathrm{l}} \doteq 0{,}358\,\mathrm{h}\,.$$

Podívejme se na jednotlivé spotřeby letadla pro obě varianty letu

$$m_\mathrm{h} = M_\mathrm{h} t_\mathrm{h} = M_\mathrm{h}\frac{s}{v_\mathrm{h}} \doteq 792\,\mathrm{kg}\,, \quad m_\mathrm{l} = M_\mathrm{l} t_\mathrm{l} = M_\mathrm{l}\frac{s}{v_\mathrm{l}} \doteq 617\,\mathrm{kg}\,.$$

Možná trochu překvapivě, jsme zjistili, že pokud poletíme s letadlem pomaleji, pak budeme mít menší spotřebu - alespoň na letově hladině 310 ($31\,000$ stop nad střední hladinou moře, zhruba $9{,}3\,\mathrm{km}$). Odpovědí je, že pomalejší let je ekonomičtější a ušetříme zhruba $175\,\mathrm{kg}$ paliva.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha CA ... když fyzik vaří

Legolasova varná konvice má v příručce napsáno $U_0 = 240\,\mathrm{V}$, $P_0 = 2\,200\,\mathrm{W}$ (tzn. při napětí U_0 má příkon P_0). Do konvice nalil přesně $V = 1{,}5\,\mathrm{l}$ vody s teplotou $T_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Zapnul konvici a stopky a ohřál vodu na teplotu $T_2 = 80\,^\circ\mathrm{C}$. Stopky ukázaly, že proces trval $t = 4{,}2\,\mathrm{min}$. Jaké napětí má Legolas v elektrické zásuvce? Předpokládejte, že odpor konvice je nezávislý na teplotě a účinnost ohřevu vody je $\eta = 90\,\%$. *Lego si často sám vaří... čaj.*

Najprv si kalorimetrickou rovnicou zrátame, že voda prijala teplo

$$Q = cm\Delta T = cV\varrho\,(T_2 - T_1)\,.$$

Z toho vieme zistiť priemerný príkon kanvice

$$P_\mathrm{k} = \frac{1}{\eta}\frac{Q}{t} = \frac{cV\varrho\,(T_2 - T_1)}{\eta t}\,.$$

Zostáva využiť údaje z kanvice. Vieme, že pri U_0 má príkon P_0. Môžeme si vyjadriť odpor kanvice alebo si stačí uvedomiť, že jej príkon je skrátka úmerný druhej mocnine napätia, čiže

$$\frac{P_\mathrm{k}}{P_0} = \frac{U_\mathrm{k}^2}{U_0^2}\,.$$

Výsledný vzťah je teda

$$U_\mathrm{k} = U_0 \sqrt{\frac{cV\varrho\,(T_2 - T_1)}{\eta t P_0}}\,.$$

Po dosadení dostávame $U_\mathrm{k} \approx 208\,\mathrm{V}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha CB ... cena nabití autobaterie

Kolik stojí nabití jedné zcela vybité autobaterie ($12\,\mathrm{V}$, $60\,\mathrm{Ah}$*)? Budeme používat nabíječku autobaterií s parametry* $12\,\mathrm{V}$, $4{,}2\,\mathrm{A}$ *a účinností* $72\,\%$*. Cena elektřiny je* $k = 4{,}0\,$*Kč*$\cdot\mathrm{kWh}^{-1}$.

Karel. Ani se neptejte.

Abychom zjistili cenu, musíme určit energii E_0, kterou potřebujeme baterii dodat. Ta je dána součinem napětí baterie $U = 12\,\mathrm{V}$ a její kapacity $Q = 60\,\mathrm{Ah}$

$$E_0 = QU = 720\,\mathrm{Wh}\,.$$

Abychom určili energii, kterou potřebujeme z elektrické sítě, musíme uvážit ještě účinnost nabíječky

$$E = \frac{E_0}{\eta} = \frac{QU}{\eta} = 1{,}0\,\mathrm{kWh}\,.$$

Cenu x pak dostaneme vynásobením spotřeby jednotkovou cenou. V našem případě je to ale velice jednoduché, protože spotřebovaná jednotka je právě jedna, tedy

$$x = Ek = \frac{QU}{\eta}k = 4{,}0\,\mathrm{Kč}\,.$$

Jedno nabití autobaterie nás tedy vyjde na zhruba 4,0 Kč.

Poznamenejme, že i když se říká, že autobaterie má napětí 12 V, není to zcela přesně konstantní údaj a reálně je na baterii o něco vyšší. Zejména v nabitém stavu. To by cenu reálně trochu zvýšilo.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CC ... jo docela jo

Matěj má rád nekonečna a tak si našel dvě téměř dokonale vybroušená rovinná zrcadla a postavil proti sobě rovnoběžně do vzdálenosti $5\,\mathrm{m}$*. Když se do nich podíval, neuviděl ale nekonečno odrazů. Jak daleko od sebe uvidí svůj nejvzdálenější obraz, jestliže se při každém odrazu od zrcadla odrazí pouze* $98{,}5\,\%$ *světla? Je schopen rozlišit obraz, který má alespoň* $10\,\%$ *původního jasu. Neuvažujte rozměry jeho hlavy ani jiné ztráty jasu.*

Napadla Matěje na přednášce z optiky (protože název „nekonečná" je moc mainstream).

Paprsek se musí odrazit celkem $\log_{0{,}985}(0{,}1) = 152$ krát (nutno zaokrouhlit dolů), než jeho intenzita klesne pod $10\,\%$. Každý odraz odpovídá pěti metrům vzdálenosti a jelikož je počet sudý, vzdálenost před prvním odrazem a vzdálenost po posledním odrazu dají dohromady $5\,\mathrm{m}$. Nejvzdálenější obraz tedy uvidí ve vzdálenosti $152 \cdot 5\,\mathrm{m} \doteq 760\,\mathrm{m}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha CD ... model atomu

Elektron v Bohrově modelu atomu vodíku obíhá kolem nehybného protonu po kružnici o poloměru r. Jeho moment hybnosti je kvantován, a tedy nabývá pouze hodnot $L = n\hbar$, kde n je číslo značící kvantový stav elektronu. Jaký bude poloměr r kruhové orbity elektronu, pokud se nachází ve druhému kvantovém stavu? *Danka vzpomínala na Fyzikální olympiádu.*

Označme $m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg hmotnosť elektrónu a v jeho rýchlosť. Na elektrón obiehajúci po kružnici okolo protónu pôsobí odstredivá sila o veľkosti

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}$$

a elektrická príťažlivá sila o veľkosti

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,,$$

kde e je elementárny náboj. Tieto sily sa navzájom kompenzujú, takže dostávame

$$F_\mathrm{o} = F_\mathrm{e}\,,$$
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,.$$

Pre moment hybnosti elektrónu platí

$$L = n\hbar = mvr\,,$$

odkiaľ si vyjadríme rýchlosť elektrónu

$$v = \frac{n\hbar}{mr}\,.$$

Toto vyjadrenie dosadíme do rovnice získanej z rovnováhy síl a vyjadríme polomer

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2}\,.$$

V našom prípade $n = 2$, po dosadení číselných hodnôt dostávame $r \doteq 2{,}1 \cdot 10^{-10}$ m.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha CE ... zhoršení účinnosti rychlovarné konvice

Máme rychlovarnou konvici o příkonu $P = 1\,800\,\mathrm{W}$, která dokáže přivést $m = 1{,}2\,\mathrm{kg}$ vody z teploty $t_0 = 18\,^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $t_1 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ za čas $\tau = 4{,}2\,\mathrm{min}$. Bohužel, vypíná se o $\Delta\tau = 15\,\mathrm{s}$ později, protože jí chvíli trvá, než si „uvědomí", že je již dovařeno. O kolik se tím zhoršuje účinnost rychlovarné konvice (tedy jaký je rozdíl mezi její účinností, kdyby se vypla ihned po dovaření, a když se vypne po $\Delta\tau$)? Měrnou tepelnou kapacitu vody považujte za konstantní $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Karel hypnotizoval rychlovarnou konvici.*

Energie potřebná na ohřátí vody je $Q = mc\,(t_1 - t_0) \doteq 413\,\mathrm{kJ}$. Energii, kterou konvice spotřebuje za dobu τ, je $E_0 = P\tau = 454\,\mathrm{kJ}$, respektive účinnost rychlovarné konvice v tomto případě by byla

$$\eta_0 = \frac{Q}{E_0} = \frac{mc\,(t_1 - t_0)}{P\tau} \doteq 91{,}1\,\%\,.$$

Stejným způsobem pak dostáváme energii, kterou konvice spotřebuje, když hřeje zbytečně o nějakou chvíli déle, $E_1 = P\,(\tau + \Delta\tau) \doteq 481\,\mathrm{kJ}$. Odpovídající účinnost je

$$\eta_1 = \frac{Q}{E_1} = \frac{mc\,(t_1 - t_0)}{P\,(\tau + \Delta\tau)} \doteq 86{,}0\,\%\,.$$

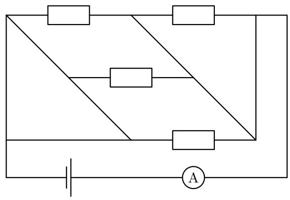
Rozdíl účinností, na který se ptá zadání úlohy, je pak

$$\Delta\eta = \eta_1 - \eta_0 = \frac{mc\,(t_1 - t_0)\,\Delta\tau}{P\tau\,(\tau + \Delta\tau)} \doteq 5{,}1\,\%\,.$$

Karel Kolář
karel@fykos.cz

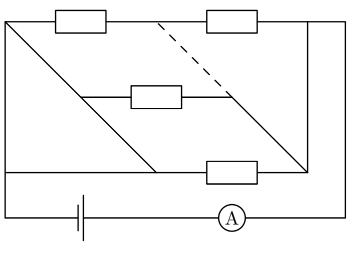
Úloha CF ... zkkzgt zjazq

Na poli byla nalezena bomba. Odpočet končí ve 13:30, takže ubozí farmáři už nestihnou utéct ze smrtícího dosahu. Máte ale možnost bombu zneškodnit. V jakých místech obvod přestřihnete, víte-li, že bomba nevybuchne, právě když ampérmetr bude ve 13:30 ukazovat hodnotu přesně $15\,\mathrm{mA}$? Nechcete riskovat, proto v hledaném řešení použijete minimální počet řezů. Obvod je napájen sadou čtyř $1{,}5\,\mathrm{V}$ baterií, kde každý odpor má hodnotu $1\,\mathrm{k\Omega}$. Místo (místa) vyznačte v obrázku.



Matěj určitě není terorista.

Z Ohmova zákona vyplývá, že je potřeba, aby obvod měl celkový odpor $\frac{2}{5}R$, kde R je odpor jednoho rezistoru. V případě nejvýše čtyř odporů to lze získaz pouze paralelním zapojením jednoho odporu, jednoho odporu a dvou sériových odporů, což odpovídá právě jenomu řezu znározněnému na obrázku.



Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha CG ... hrajem kuličky

Danka má kuličku s poloměrem $R = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ a hmotností $m = 20\,\mathrm{g}$. Šťouchne do ní prstem tak, že na ni působí konstantní silou $F = 15\,\mathrm{N}$ ve vodorovném směru po dobu $t = 0{,}20\,\mathrm{s}$ (po tuto dobu zanedbáváme valivý odpor, kulička neprokluzuje). Jakou dobu od konce urychlení se bude kulička pohybovat? Rameno valivého odporu je $\xi = 0{,}03\,\mathrm{m}$. Kulička neklouže.

Danka našla kuličku.

Urýchlením získa gulička hybnosť p,

$$p = Ft = mv_0\,,$$

kde v_0 je rýchlosť guličky po urýchlení. Na guličku po urýchlení pôsobí konštantná valivá trecia sila

$$T = \frac{\xi mg}{R}\,.$$

Teda gulička sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, so zrýchlením rovným podľa 2. Newtonovho zákona

$$a = -\frac{T}{m} = -\frac{\xi g}{R}\,.$$

Ak označíme dobu valenia guličky t_v, potom pre ňu platí

$$v_0 + at_\mathrm{v} = 0\,.$$

Dosadíme z predošlých rovníc a vyjadríme t_v

$$0 = \frac{Ft}{m} - \frac{\xi g}{R}t_\mathrm{v}\,,$$

$$t_\mathrm{v} = \frac{FtR}{\xi mg} \doteq 5{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Gulička sa bude pohybovať po dobu 5,1 s.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha CH ... zeměplochá reloaded

Jak všichni dobře víme, Země je placka, kterou na zádech nesou sloni. Nad ní je pak klenba, na které jsou zavěšené Slunce, stálice i Měsíc. Pokud bychom k upevnění měsíce o hmotnosti $7{,}348 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ použili ocelové lano kruhového průřezu, jaký poloměr by muselo mít? Délka lana je $3{,}2\,\mathrm{km}$ a jeho průřez je všude stejný. Mez pevnosti v tahu oceli je $700\,\mathrm{MPa}$, její hustotu uvažujte $7\,850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Měsíc i lano jsou v konstantním tíhovém zrychlení o hodnotě g. Vzájemné gravitační působení lana a Měsíce zanedbejte.

Jáchym má slabost pro reloaded úlohy.

Největšímu napětí je lano vystaveno ve svém nejvyšším bodě, protože tam na něj působí nejen tíhová síla Měsíce, ale i tíhová síla celého lana. Označíme-li hmotnost Měsíce m, hustotu lana ϱ, jeho poloměr r a délku l, pro celkovou tíhovou sílu v nejvyšším bodě dostáváme

$$F_g = \left(m + \pi r^2 l\varrho\right) g\,.$$

Zadané maximální napětí σ vynásobíme plochou průřezu lana πr^2, čímž dostaneme maximální sílu, která na lano může působit

$$F_{\max} = \sigma \pi r^2 \,.$$

Nakonec jen porovnáme obě síly a vyjádříme hledaný poloměr

$$F_g = F_{\max} \,,$$

$$r = \sqrt{\frac{mg}{\pi\left(\sigma - l\varrho g\right)}} \doteq 2{,}25 \cdot 10^7\,\mathrm{m}\,.$$

Můžeme si povšimnout, že tato hodnota je velmi nereálná a celkově konstrukce takového lana nedává smysl.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha DA ... ani na mastný fľak

Jestliže mezi standardizovaný zdroj světla se svítivostí $I_0 = 10\,\mathrm{kcd}$ a žárovku ve vzdálenosti $d = 3\,\mathrm{m}$ od zdroje umístíme list papíru s mastnou skvrnou na jejich spojnici ve vzdálenosti $l = 1\,\mathrm{m}$ od žárovky, bude se celý papír jevit jako rovnoměrně osvětlený. Určete svítivost I žárovky. *Dodo si spomenul na labák, ktorý sa už nemeria.*

Mastný fľak sa stane neviditeľný, ak budú osvetlenia oboch strán papiera zhodné

$$\frac{I}{l^2} = F = \frac{I_0}{(d-l)^2} \,.$$

Pre svietivosť žiarovky teda máme $I = I_0 \left(d/l - 1\right)^{-2} = 2{,}5\,\mathrm{kcd}$.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha DB ... no rasist králíček

Malý, tlustý, kulatý, kouzelný králíček o průměru $d = 30\,\mathrm{cm}$ se vznáší ve vesmíru blízko Zemi a je mu zima. Tak ho napadne obětovat poslední barvu Vanta Black, která odráží pouhých $\eta = 0{,}035$ dopadajícího záření, a pomaluje se jí celý na černo. Jaký tepelný výkon bude přijímat ze Slunce? Zářivý výkon Slunce je $W = 3{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. *Honzovi byla zima.*

Vzdálenost králíčka od Slunce můžeme uvažovat $r = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ a jelikož králikoule pohlcuje téměř veškeré světlo, nemusíme uvažovat úhel dopadu a jí pohlcený výkon, neboli přijatý výkon bude

$$P = (1-\eta)\, W \frac{\pi\left(d/2\right)^2}{4\pi r^2} = \frac{(1-\eta)\, W d^2}{16 r^2} \doteq 91{,}7\,\mathrm{W}\,.$$

Jan Střeleček
`strelda@fykos.cz`

Úloha DC ... fyzik dřevorubcem

Jakou rychlostí dopadne na zem špička dokonale homogenního stromu se zanedbatelnou tloušťkou vysokého h, pokud ho usekneme úplně u země? Spodní bod je fixovaný.

Lego se snažil postavit pero na špičku.

Potenciálna energia sa premení na rotačnú energiu

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}J\omega^2\,.$$

Strom je homogénny, takže má ťažisko vo svojom strede. Tým pádom

$$\Delta h = \frac{1}{2}h\,.$$

Moment zotrvačnosti úsečky okolo ťažiska je

$$J_t = \frac{1}{12}ml^2\,.$$

Zo Steinerovej vety teda vyplýva, že moment zotrvačnosti okolo krajného bodu je

$$J = J_t + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mh^2\,.$$

A nakoniec si zostáva uvedomiť, že rýchlosť špičky stromu je $v = \omega h$. Teraz už len podosádzame do zákona zachovania energie a dostávame

$$v = \sqrt{3gh}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha DD ... black box

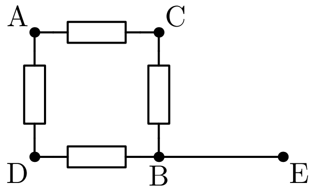
Máte černou skříňku s pěti výstupy označenými A až E. Víte, že uvnitř jsou pouze rezistory o jednotkovém odporu a vodiče. Tabulka udává, jaké hodnoty jednotkového odporu naměříte multimetrem, pokud ho připojíte na příslušné dva vstupy. Nakreslete schéma zapojení.

Poznámka *Není použito více než sedm rezistorů.*

	A	B	C	D	E
A	0	1	3/4	3/4	1
B	1	0	3/4	3/4	0
C	3/4	3/4	0	1	3/4
D	3/4	3/4	1	0	3/4
E	1	0	3/4	3/4	0

Nejprve si povšimněme, že B a E jsou spojeny vodičem. Tím se problém zjednoduší na černou skříňku se čtyřmi výstupy (A až D).

Dále si můžeme všimnout jakési symetrie mezi těmito čtyřmi výstupy. Každý má právě jeden „sesterský“ výstup, s nímž má odpor právě 1, zatímco vůči zbylým dvěma výstupům má odpor 3/4. Máme-li k dispozici pouze ≤ 7 odporů, existují pouze dvě možnosti, jak obvod zapojit symetricky vůči všem výstupům tak, aby byly zároveň všechny propojeny přes nenulový



odpor. Buď cyklické zapojení do kolečka pomocí čtyř odporů nebo totéž zapojení s propojením protilehlých vrcholů přes další odpor „do kříže“ (tedy celkem použijeme 6 odporů). Snadným výpočtem ověříme, že pouze první případ splňuje zadané podmínky.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha DE ... dva kvádry

Bylo nebylo, žily si dva kvádříky s podstavami S_1 a S_2, kde $S_1 < S_2$. Jednoho dne první z nich (tedy ten s menší podstavou) spadl do druhého, jelikož ten byl celý dutý. Ale první dutý nebyl, měl výšku h a hustotu ϱ_1. Využil to a zamyslel se: jaký objem tekutiny s hustotou $\varrho > \varrho_1$ je třeba nalít dovnitř druhého kvádru, aby se první odlepil ode dna?

Legolas se snažil vytáhnout hrnek z umyvadla.

Na to, aby sa kváder odlepil od dna, musí vztlaková sila vykompenzovať gravitačnú

$$F_{\mathrm{vz}} = F_{\mathrm{g}} \,,$$
$$V_{\mathrm{p}}\varrho g = S_1 h \varrho_1 g \,,$$
$$V_{\mathrm{p}} = S_1 h \frac{\varrho_1}{\varrho} \,.$$

Takže vieme, aká časť kvádra je ponorená. Z toho vieme, že voda siaha do výšky

$$v = \frac{V_{\mathrm{p}}}{S_1} = h\frac{\varrho_1}{\varrho} \,.$$

No a keďže voda vypĺňa priestor medzi kvádrami, jej objem musí byť aspoň

$$V = v\Delta S = h\frac{\varrho_1}{\varrho}\left(S_2 - S_1\right) \,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha DF ... rychlá srážka

V kladném směru osy x letí částice s klidovou hmotností $m_1 = 2m_0$ rychlostí $v_1 = \frac{3}{5}c$. Naproti ní letí částice s hmotností $m_2 = 3m_0$ rychlostí $v_2 = -\frac{4}{5}c$. Tyto dvě částice se dokonale nepružně srazí a jejich srážkou vznikne částice s hmotností m_3 letící rychlostí v_3. Určete tuto rychlost včetně směru.

Danka vzpomínala na kurz relativity.

Ide o relativistickú zrážku, pri ktorej platí zákon zachovanie celkovej relativistickej hmotnosti sústavy

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}=\frac{m_3}{\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}}\,,$$

a tiež celkovej relativistickej hybnosti sústavy

$$\frac{m_1v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_2v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}=\frac{m_3v_3}{\sqrt{1-\frac{v_3^2}{c^2}}}\,.$$

Z prvej rovnice vyjadríme m_3, to dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme v_3 ako

$$v_3=\frac{\frac{m_1v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_2v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}}{\frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}}\,.$$

Po úprave máme výraz

$$v_3=\frac{m_1v_1\sqrt{c^2-v_2^2}+m_2v_2\sqrt{c^2-v_1^2}}{m_1\sqrt{c^2-v_2^2}+m_2\sqrt{c^2-v_1^2}}\,.$$

Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame hodnotu $v_3=-\frac{1}{3}c$. Mínus značí, že častica sa bude pohybovať v protismere osi x.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha DG ... větráme

V pokoji na koleji je teplota $t_{\mathrm{in}}=15\,^\circ\mathrm{C}$. Venku mrzne $t_{\mathrm{out}}=-5\,^\circ\mathrm{C}$. V pokoji se nacházejí dva lidé, každý s výkonem $P_0=200\,\mathrm{W}$, radiátor s výkonem $P_1=1500\,\mathrm{W}$ a netěsnící skleněné jednoduché okno s plochou $S=5\,\mathrm{m^2}$ s hodnotou tepelné izolace $\Lambda=0{,}73\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$. Vypočítejte, jaký objem V studeného vzduchu do pokoje přiteče za minutu. Předpokládejte, že se tento objem vyměnil za stejný objem „teplého“ vzduchu z místnosti, jinak je pokoj dokonale tepelně izolovaný. *Dodovi byla na koleji zima.*

Tepelný tok vedením tepla oknom určíme ako

$$P_2=\Lambda S\Delta t\,,$$

kde Δt je rozdiel teplôt vo vnútri a vonku. Pre tepelný výkon P, ktorý uniká z miestnosti kvôli prúdeniu hmoty máme $P+P_2=2P_0+P_1$. Pre tok vzduchu oknom máme

$$P=c\dot{m}\Delta t=c\varrho Q_V\Delta t\,,$$

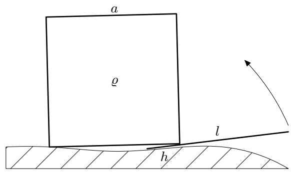
kde $c=1{,}0\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ je merná tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom tlaku, $\varrho = 1{,}28\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota vzduchu a Q_V je objemový tok vzduchu netesným oknom. Objem vzduchu, ktorý oknom vytečie za čas τ určíme ako $V=Q_V\tau$. Celkovo teda oknom za $\tau=60\,\mathrm{s}$ vytečie

$$V=\frac{2P_0+P_1-\Lambda S\ \Delta t}{c\varrho\Delta t}\tau\doteq 4{,}3\,\mathrm{m^3}\,.$$

Do izby za minútu natečie asi 4,3 m^3 studeného vzduchu.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha DH ... zdviháme pákou



Jakou minimální silou F musíme působit na páčidlo dlouhé $l = 2\,\mathrm{m}$, abychom nadzdvihli kostku s hranou délky $a = 1{,}5\,\mathrm{m}$? Páčidlo je rovná tyč, která je zasunuta pod podstavou kostky do hloubky $h = 0{,}1\,\mathrm{m}$ kolmo na spodní hranu kostky ve středu spodní hrany kostky. Předpokládejte, že všechny objekty, tedy kostka, páčidlo a podlaha jsou dokonale tuhá tělesa. Hustota oceli je $\varrho = 7\,800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Dodo si rád ušetří trochu sily.*

Z rovnosti momentov síl v bode zaprenia páčidla dostávame vzťah medzi silou F, ktorou pôsobíme na páčidlo a silou f, ktorou páčidlo pôsobí na hranu kocky

$$Fl = fh\,.$$

Kocku budeme otáčať okolo protiľahlej hrany. Pre rovnosť momentov tiažovej sily F_g a sily f máme

$$F_g\frac{a}{2} = fa\,.$$

Ak vyjadríme tiažovú silu z objemu a hustoty kocky dostávame pre silu f

$$f = \frac{1}{2}\varrho a^3 g\,,$$

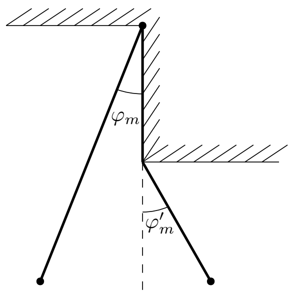
čo po dosadení pre silu F dáva

$$F = \frac{1}{2}\varrho a^3 g\frac{h}{l} = 6{,}5\,\mathrm{kN}\,.$$

Teda minimálna sila, ktorou musíme pôsobiť, je 6,5 kN.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha EA ... výchylka asymetrického kyvadla



Máme kyvadlo, které je schematicky (neodpovídají délky a úhly) znázorněné na obrázku. Funguje tak, že vlevo má délku l s maximální úhlovou výchylkou φ_m a na druhé straně se polovina délky jeho vlákna zadrží o stěnu a pak se dostane do maximální výchylky φ'_m. Pokud je $\varphi_m = 5{,}0\,^\circ$, kolik bude φ'_m? Uvažujte ideální matematické kyvadlo bez ztrát energie.

Karel má rád asymetrické kyvy.

Vzhledem k tomu, že u kyvadla implicitně předpokládáme, že jsme v homogenním tíhovém poli, tak víme, že hmotný bod se v obou extrémních polohách bude nalézat ve stejné výšce. Tu si

můžeme označit jako h. Využijeme dva pravoúhlé trojúhelníky.
Z většího dostáváme

$$\cos\varphi_m = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l}$$

a z menšího pak

$$\cos\varphi'_m = \frac{\frac{l}{2}-h}{\frac{l}{2}} = 1 - \frac{2h}{l}\,.$$

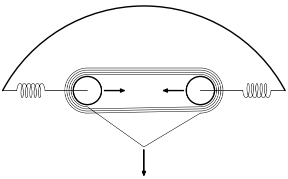
Pokud vyjádříme z obou rovnic h a dosadíme do sebe, dostáváme

$$\cos\varphi'_m = 2\cos\varphi_m - 1\,, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'_m = \arccos\left(2\cos\varphi_m - 1\right) \doteq 7{,}07\,^\circ\,.$$

Výchylka kyvadla na druhé straně bude tedy $7{,}07\,^\circ$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EB ... Jáchymův luk



Jáchymův nový luk můžeme aproximovat dvěma kladkami se zanedbatelným poloměrem ve vzdálenosti y_0 od sebe, mezi kterými je navinuta tětiva ve čtyřech smyčkách. Tětiva je uzavřený provaz s konstantní délkou $8y_0$. Kladky se mohou pohybovat pouze na spojnici svých středů, každá z nich je k pevnému (neohebnému) rámu luku připevněna pružinou s tuhostí k. Jáchym nyní chytí jedno vlákno tětivy uprostřed spojnice středů kladek a začne ho táhnout kolmo na tuto spojnici. Určete závislost síly, kterou k tomu vynaloží, na vzdálenosti x, kterou při natahování urazí. Počáteční napětí v pružinách je nulové. *V původní verzi úlohy byl normální luk. Taky měla jiného autora.*

Označme vzdálenost kladek y. Na začátku zřejmě platí $y = y_0$. Celková délka tětivy je $l = 8y_0$. Ve chvíli, kdy Jáchym natáhne jedno vlákno do vzdálenosti x, změní se délka tohoto úseku tětivy na

$$z = 2\sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{4x^2 + y^2}\,.$$

Ostatních sedm vláken bude stále nataženo rovně mezi kladkami, takže pro délku tětivy bude platit $l = 7y + z$. Délka tětivy se zachovává, odkud si můžeme vyjádřit vzdálenost kladek

$$\begin{aligned} 8y_0 &= 7y + z\,,\\ 0 &= 12y^2 - 28y_0y + 16y_0^2 - x^2\,,\\ y &= \frac{7y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 3x^2}}{6}\,. \end{aligned}$$

Zřejmě platí $y \leq y_0$, takže nás zajímá kořen s mínusem. Každá pružina na kladky působí silou

$$F_y = \frac{1}{2}\left(y_0 - y\right)k\,.$$

Ve chvíli, kdy Jáchym při natahování tětivy silou F_x urazí nějakou nekonečně malou vzdálenost $\mathrm{d}x$, vykoná při tom práci $\mathrm{d}W = F_x\mathrm{d}x$. Tato práce se použije na změnu vzdálenosti kladek $\mathrm{d}y$, a tedy na prodloužení pružin dohromady o $-\mathrm{d}y$. Změna energie uložené v každé pružině tak bude

$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} = -\frac{1}{2}F_y\mathrm{d}y\,.$$

Celková změna energie pružin bude $\mathrm{d}W = 2\mathrm{d}W_\mathrm{p} = -F_y\mathrm{d}y$. Z toho dostáváme rovnici

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}F_y = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(y_0 - y\right)k\,.$$

Nyní už jenom zderivujeme y podle x, dosadíme do rovnice a po pár úpravách dostaneme

$$F_x = \frac{1}{24}kx\left(\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + 3x^2}} - 1\right)\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha EC ... laser

Pan učitel svítí na tabuli zeleným laserovým ukazovátkem. Obsah kolmého průřezu paprsku je $1\,\mathrm{cm}^2$ *a výkon laseru je* $1\,\mathrm{mW}$. *Kolik fotonů se nachází v jednom metru paprsku? Vlnová délka zeleného světla je* $530\,\mathrm{nm}$. *Napadla Matěje na přednášce z optiky.*

Označme t čas, který trvá světlu, než urazí vzdálenost $l = 1\,\mathrm{m}$. Za tento čas laser vyzáří energii Pt, kde P je jeho výkon. Tato energie musí být rovna energii fotonů NE, kde N je počet fotonů v jenom metru a $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$ je energie jednoho fotonu. h je planckova konstanta, f je frekvence fotonu, λ je jeho vlnová délka a c je rychlost světla (zřejmě tedy $t = l/c$). Dostáváme

$$\begin{aligned} Pt &= NE\,,\\ P\frac{l}{c} &= N\frac{hc}{\lambda}\,,\\ N &= \frac{P\lambda l}{hc^2} \approx 8{,}89\cdot 10^6\,. \end{aligned}$$

V jednom metru je tedy téměř devět miliónů fotonů.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha ED ... biliard v 1D

Uvažujme nekonečně dlouhý žlab a $N = 17$ *stejných koulí, které jsou ve žlabu a dokážou se pohybovat pouze podél něho. Koule mohou mít libovolné polohy a rychlosti. Jaký je maximální počet srážek, který může nastat? Všechny srážky jsou dokonale pružné, tření ve žlabu zanedbejte. Matúš videl biliardový turnaj.*

Vezmime si graf závislosti pozície gúľ od času. Pohyb každej gule v ňom bude tvoriť priamku, keďže sa pohybujú rovnomerne priamočiaro. Zrážky sú reprezentované priesečníkmi týchto priamok a pretože gule sú identické, tak si pri pružnej zrážke iba vymenia rýchlosti. A to znamená, že jedna guľa bude pokračovať po dráhe tej druhej a naopak, čiže priamky nebudú lomené. Najväčší počet zrážok je rovný najväčšiemu počtu priesečníkov N priamok, čo je

$$p = \frac{N\,(N-1)}{2}\,.$$

V našom prípade je $N = 17$, takže môže nastať maximálne 136 zrážok.

Matúš Kopunec
`matus.kopunec@fykos.cz`

Úloha EE ... rozmité kmity

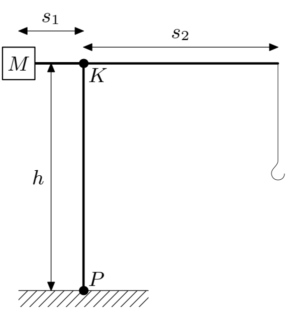
Jaké je pravděpodobnost, že když se náhodně podíváme na hmotný bod kmitající na konci pružiny, tak nebude vzdálený více jak $y_1 = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ od své rovnovážné polohy, pokud je jeho amplituda $y_\mathrm{m} = 3{,}0\,\mathrm{cm}$? Uvažujte netlumené harmonické kmity. *Karel zíral na pružinky.*

Kmitání hmotného bodu na pružině je harmonický pohyb, který můžeme popsat rovnicí $y(t) = y_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi_0)$. Vzhledem k tomu, že nás zajímá jenom pravděpodobnost, že bude výchylka menší než y_1, tak můžeme uvažovat $\varphi_0 = 0$, což nám udává jenom posunutí počátku kmitání v čase. Stejně tak můžeme uvažovat, že $\omega t = \alpha$, abychom si zjednodušili zápis.

Nyní se už zamysleme nad samotným harmonickým pohybem $y(t) = y_\mathrm{m}\sin\alpha$. Opakuje se s periodou 2π. Pokud se ale ještě na graf podíváme dále, tak pokud nás zajímá v absolutní hodnotě, což je naše situace, pak se opakuje s periodou π, a navíc je v rámci tohoto období osově symetrický vůči $\pi/2$. Bude nám stačit se tedy zaměřit pouze na prvních $\langle 0, \pi/2\rangle$. Celková doba je úměrná celkovému úhlu $\pi/2$. Doba, ve které bude výchylka menší než y_1, je pak od nulového času/úhlu do situace, kdy $y_1 = y_\mathrm{m}\sin\alpha$, tedy $\sin\alpha = 1/3 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0{,}340$. Pravděpodobnost, že výchylka bude menší než y_1, tedy je $P = \alpha/(\pi/2) \doteq 21{,}6\,\%$. Pravděpodobnější situace tedy je, že vzdálenost od rovnovážné polohy bude vyšší.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EF ... jeřábník



Jeřábník zapomněl na to, jak těžká závaží dokáže jeho jeřáb uzvednout. Jeho jeřáb je vysoký $h = 80\,\mathrm{m}$ a ve vzdálenosti $s_1 = 10\,\mathrm{m}$ od kabiny (bod K) je umístěno protizávaží o hmotnosti $M = 10\,\mathrm{t}$. Ve vzdálenosti $s_2 = 60\,\mathrm{m}$ visí volně hák (jeho hmotnost neuvažujte) a celá konstrukce má délkovou hustotu $\lambda = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Jeřábník ví, že nejslabší místo jeřábu jsou pata (bod P), kde je ukotven v zemi, a místo spoje (bod K). Nepamatuje si určitou kritickou hodnotu momentu síly, který může působit v tomto místě (je jedno v jakém směru). Při přesáhnutí této hodnoty se jeřáb zřítí. Jakou maximální hmotnost si může dovolit zvednout? *Matějovo vysněné povolání.*

Při nezatíženém jeřábu na patu působí moment síly τ. Po zvednutí dostatečného závaží bude celkový moment působit na opačnou stranu (a strhávat tak jeřáb směrem doprava). Stačí si tedy ohlídat, aby velikost tohoto nového momentu nebyla větší než τ. Zřejmě mezi momenty v bodech K a P nebude rozdíl.

Celé rameno jeřábu má hmotnost $\lambda\left(s_1+s_2\right)$ a jeho těžiště je ve vzdálenosti $\left(s_2-s_1\right)/2$ od bodu K napravo. Působí tedy momentem $-\lambda\left(s_1+s_2\right)\left(s_2-s_1\right)/2$ (proti momentu závaží Ms_1). Máme tedy

$$\tau = Ms_1 - \frac{\lambda\left(s_1+s_2\right)\left(S_2-s_1\right)}{2}\,.$$

Aby byl výsledný moment $-\tau$, musí samotné závaží vyvolat moment 2τ. Maximální hmotnost závaží označme m.

$$\begin{aligned} ms_2 &= 2\tau\,,\\ m &= \frac{2Ms_1}{s_2} - \frac{\lambda}{s_2}\left(s_2^2 - s_1^2\right) = 2\,750\,\mathrm{kg}\,. \end{aligned}$$

Tedy závaží může vážit maximálně $2\,750\,\mathrm{kg}$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha EG ... vánoční sněhulák reloaded

Vezměme si velkou sněhovou kouli s poloměrem R a gravitačním zrychlením na jejím povrchu g a použijeme ji jako základ sněhuláka s nekonečným počtem koulí stejné hustoty, jejichž poloměry tvoří geometrickou posloupnost s koeficientem $1/2$. Sousední koule se tedy dotýkají a všechny středy koulí leží na jedné přímce. Jaké bude gravitační zrychlení na vrcholu tohoto sněhuláka? Nepůsobí zde žádné vnější gravitační pole.

Matúš si chtěl postavit opravdu velkého sněhuláka.

Z gravitačného zákona môžme vidieť, že gravitačné zrýchlenie závisí od prvej mocniny dĺžky, takže keď všetky rozmery zmenšíme na polovicu, dostaneme polovičné zrýchlenie. Takýto polovičný snehuliak je rovnaký ako pôvodný bez prvej gule, čo nám dáva rovnicu

$$g' = g_1 + \frac{g'}{2}\,,$$

kde g_1 je gravitačné zrýchlenie prvej gule. Keďže polomery gúľ tvoria geometrickú postupnosť, tak dostaneme, že výška snehuliaka bude

$$h = \frac{2R}{1-\frac{1}{2}} = 4R\,.$$

Takže prvá guľa je vo vzdialenosti $3R$, čiže prispieva 9-krát menším zrýchlením ako je jej gravitačné zrýchlenie na povrchu, čo po dosadení do predchádzajúcej rovnice nám dá

$$g' = \frac{g}{9} + \frac{g'}{2}\,.$$

Potom $g' = \frac{2}{9}g$.

Matúš Kopunec
matus.kopunec@fykos.cz

Úloha EH ... těžíme Měsíc

Po úspěšném překonání nukleární války se lidstvu konečně podařilo vytvořit stabilní základnu na Měsíci. Namísto rozvíjení vědeckého výzkumu ale začali plundrovat měsíční krajinu. Objevili totiž materiál nevyčíslitelné hodnoty, zvaný Fykosium, o hustotě $\varrho = 5\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, který začali těžit rovnoměrně z měsíčního povrchu. Těžení bylo natolik rozsáhlé, že poloměr Měsíce byl postupně zmenšen natolik, že ze zemského povrchu již nebylo možné pozorovat úplné zatmění Slunce. Vypočítejte hmotnost m vytěženého Fykosia. Velká poloosa dráhy Měsíce kolem Země je $a = 384\,400\,\mathrm{km}$ a její excentricita je $e = 0,0549$. Uvažujte, že Země obíhá kolem Slunce po kruhové dráze o poloměru $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Poloměr Slunce je $R_\mathrm{S} = 6{,}96 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$. Rovníkový poloměr Země je $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$. Poloměr Měsíce je $R_\mathrm{M} = 1\,738\,\mathrm{km}$. Předpokládejte, že $R_\mathrm{Z} \ll r$. Rovněž předpokládejte, že veškeré vytěžené Fykosium zatím zůstává na oběžné dráze Měsíce, orbita Měsíce se tedy nezměnila.

Jáchym a Jirka přemýšleli nad budoucností lidstva.

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{R_\mathrm{S}}{r} = \frac{R}{a(1-e) - R_\mathrm{Z}}\,,$$

kde R je poloměr Měsíce po vytěžení Fykosia. Odtud

$$R = \frac{R_\mathrm{S}}{r}\left(a(1-e) - R_\mathrm{Z}\right) \doteq 1660{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Objem V a hmotnost m vytěženého Fykosia pak spočteme jako

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_\mathrm{M}^3 - R^3)\,,$$
$$m = V\varrho = \frac{4}{3}\pi\varrho(R_\mathrm{M}^3 - R^3) \doteq 1{,}41 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}\,.$$

Hmotnost Fykosia, které jsme vytěžili, je přibližně $1{,}41 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$.

Jáchym Bareš
bares@fykos.cz

Úloha FA ... vánoční sněhulák

Matúš si postavil sněhuláka následujícím způsobem. Vyrobil ze sněhu homogenní kouli s poloměrem R. Na ni položil druhou kouli stejné hustoty s poloměrem $R/2$. Na druhou kouli třetí, s poloměrem $R/4$. Tak pokračoval dál, že vždy položil kouli s polovičním poloměrem, co měla předcházející, až jich měl nekonečně mnoho. V jaké výšce nad zemí se nachází těžiště takového sněhuláka?

Matúš si chtěl postavit sněhuláka.

Ťažisko snehuliaka spočítame pomocou váženého priemeru polôh jednotlivých gúľ, kde váhou jednotlivých zložiek sú ich hmotnosti. Pre polohu ťažiska x_T platí

$$Mx_T = \sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i\,,$$

a M je hmotnosť snehuliaka. Počiatok súradnicovej osi si vieme zvoliť ľubovoľne, tak si ho zvolíme v strede najväčšej guľe, aby zo sumy vypadol prvý člen. Zvyšok sumy vieme prepísať na

$$Mx_T = m_1 \cdot 0 + \sum_{i=2}^{\infty} m_i x_i = M' x'_T \,.$$

M' a x'_T sú hmotnosť a poloha ťažiska snehuliaka bez prvej gule, ktorý je identický s pôvodným snehuliakom, ale s polovičnými rozmermi. A keďže hmotnosť je úmerná tretej mocnine polomeru a poloha ťažiska prvej mocnine, platí $M' = M/8$ a $x'_T = x_T/2 + 3R/2$ ($x_T/2$ je vzdialenosť od stredu druhej gule). Po dosadení za M' a x'_T dostaneme rovnosť

$$Mx_T = \frac{M}{8} \cdot \frac{3R + x_T}{2} \,, x_T \qquad = \frac{R}{5} \,.$$

Ale x_T je vzdialenosť ťažiska od stredu prvej gule, ktorá má polomer R, takže výška ťažiska bude

$$h_T = \frac{6R}{5} \,.$$

Matúš Kopunec
matus.kopunec@fykos.cz

Úloha FB ... dokluž dál

Pod jakým úhlem (vůči zemi) musíte vyhodit těleso, aby doklouzalo co nejdále od vás? Nacházíte se na vodorovné rovině, kde je koeficient tření tělesa $f = \sqrt{3}/4$, házete ze země, náraz tělesa na zem je dokonale nepružný a těleso nerotuje.

Matěj si představoval, jak háže sněhové koule, protože neměl žádný sníh :,(.

Nejprve těleso letí vzduchem po klasické parabolické trajektorii. Poté dopadne na zem a zachová si pouze vodorovnou složku rychlosti, která se bude postupně snižovat, dokud se těleso nezastaví. Uvažujme, že můžeme házet rychlostí v pod libovolným úhlem φ vůči vodorovnému směru. Z rovnic pro šikmý vrh v homogenním gravitačním poli snadno dostaneme vzdálenost s_1, ve které těleso dopadne na zem

$$s_1 = \frac{2v^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi \,.$$

Po nárazu si těleso zachová pouze vodorovnou složku rychlosti $v_x = v\cos\varphi$. Poté bude následovat rovnoměrně zpomalený pohyb pod vlivem třecího zrychlení $a_\mathrm{t} = fg$. Pro čas kluzu platí

$$t = \frac{v_x}{a_\mathrm{t}} = \frac{v_x}{fg} \,.$$

Za tuto dobu těleso urazí dráhu

$$s_2 = v_x t - \frac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2 = \frac{v_x^2}{2fg} = \frac{v^2}{2fg} \cos^2\varphi \,.$$

Celková vzdálenost pak bude součtem jednotlivých vzdáleností

$$s = s_1 + s_2 = \frac{2v^2}{g} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{v^2}{2fg} \cos^2\varphi \,.$$

Hledáme maximum funkce $s(\varphi)$. Spočítáme první derivaci a položíme jí rovnou nule

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{v^2}{g}\left(2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi - \frac{1}{f}\cos\varphi\sin\varphi\right) ,$$
$$0 = 2f\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) - \cos\varphi\sin\varphi ,$$
$$0 = 2f\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi ,$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, 4f .$$

Celková dráha s má minima na krajích intervalu, tedy pro $\varphi = 0\,^\circ$ a $\varphi = 90\,^\circ$. Námi nalezený extrém tak zřejmě bude hledaným maximem. Po dosazení $f = \sqrt{3}/4$ dostaneme $\varphi = 30\,^\circ$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FC ... kyvadlové odrazy

Máme kyvadlo, které je tvořeno ocelovou kuličkou (poloměr $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$, měrná tepelná kapacita $c = 452\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, hustota $\varrho = 7\,850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$), na závěsu délky $l = 1{,}0\,\mathrm{m}$. Závěs je upevněný na stěně tak, že se kulička vždy odrazí od stěny přesně v nejnižším bodě dráhy. V průběhu odrazu dojde k tepelné ztrátě - kulička se odrazí s nižší rychlostí danou koeficientem restituce definovaným jako $k = v_1/v_0 = 0{,}90$ (v_0 je rychlost před odrazem a v_1 po odrazu). O jakou teplotu se zahřeje kulička po prvních třech odrazech, pokud kyvadlo vypustíme s počáteční výchylkou $\alpha = 45^\circ$ a polovina energie ze ztrát při odrazech se využije pro zahřátí kuličky?

Karel mlátil hlavou o zeď.

Úloha je relativně komplikovaná počtem kroků, které je potřeba provést, byť jednotlivé kroky jsou relativně snadné. Pro neztracení se v postupu se může hodit dělat mezivýpočty, ale současně je důležité nepřenášet zaokrouhlovací chyby. Například už kvůli tomu, že v průběhu řešení úlohy zjistíme, že rozměr kuličky a její hmotnost nejsou důležité parametry. Právě proto, že nejspíše většina se vydá cestou s explicitně vyjádřenou hmotností, budeme také uvádět mezivýsledky. Alespoň nám pomůžou s kvantitativní představou jednotlivých veličin.

Začněme s celkovou počáteční mechanickou energií kyvadla. Ta odpovídá maximální výchylce, kterou bude mít kyvadlo a posléze se přemění na kinetickou, dále začne docházet ke ztrátám. Celková počáteční energie je

$$E_0 = mgl\left(1 - \sin\alpha\right) \doteq 0{,}0118\,\mathrm{J} ,$$

kde jsme dosadili za hmotnost $m = \varrho V = 4\pi\varrho r^3/3 \doteq 4{,}11\,\mathrm{g}$.

Koeficient restituce máme definovaný jako poměr rychlostí. Vzhledem k tomu, že energie je úměrná druhé mocnině rychlosti,[1] platí pro poměr energie po a před srážkou

$$K = \frac{E_1}{E_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = k^2 .$$

[1] Kdybychom uvažovali i rotační energii kuličky jakožto fyzického kyvadla, dospěli bychom ke stejnému závěru, protože rotační energie je úměrná druhé mocnině úhlové rychlosti, která je v tomto případě úměrná rychlosti, takže celková mechanická energie je opravdu úměrná druhé mocnině rychlosti.

Takto můžeme pokračovat a zjistíme, že mechanická energie kyvadla po dvou odrazech je $E_2 = KE_1 = k^2 E_1 = k^4 E_0$ a obdobně po třech odrazech $E_3 = k^6 E_0$. Celková energie, která se přeměnila během tří odrazů na nějaké různé další formy energie, jako je tepelná, zvuková a další, je

$$\Delta E = E_0 - E_3 = \left(1 - k^6\right) E_0 = mgl\,(1 - \sin\alpha)\left(1 - k^6\right) \doteq 5{,}53\,\mathrm{mJ}\,.$$

Dále budeme používat polovinu této energie $\Delta E/2 = Q \doteq 2{,}77\,\mathrm{mJ}$, která se uplatní v zahřátí kuličky, jak bylo uvedeno v zadání.

Změnu teploty ΔT můžeme určit z rovnice pro teplo $Q = mc\Delta T$. Dosazením energie, kterou jsme určili, dostáváme konečný výsledek

$$\frac{\Delta E}{2} = mc\Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \Delta T = \frac{\left(1 - k^6\right) E_0}{2mc} = \frac{1 - k^6}{2}\frac{gl}{c}(1 - \sin\alpha) \doteq 1{,}5\,\mathrm{mK}\,.$$

Kulička se po třech odrazech zahřeje o nepatrných 1,5 mK.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FD ... kondenzátory

Na začátku máme LC obvod složený z cívky a deskového kondenzátoru. Vzdálenost mezi deskami kondenzátoru je $d_0 = 4{,}0\,\mathrm{mm}$, plocha desek je $S = 500\,\mathrm{cm}^2$ a indukčnost cívky je $L = 20\,\mathrm{mH}$. Po nějakém čase mezi desky kondenzátoru vložíme jinou vodivou desku tloušťky $r = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ tak, že se nachází uprostřed mezi deskami kondenzátoru. Jak se změní rezonanční frekvence tohoto nového LC obvodu? Vyjádřete jako poměr nové a původní frekvence.

Pro počáteční kapacitu kondenzátoru platí

$$C_0 = \frac{\varepsilon S}{d_0}\,,$$

kde ε je permitivita prostředí. Vložíme-li doprostřed kondenzátoru vodivou desku, efektivně ho tím rozdělíme na dva menší kondenzátory. Vzdálenost jejich desek bude

$$d = \frac{d_0 - r}{2}\,,$$

takže pro jejich kapacity dostáváme

$$C' = \frac{2\varepsilon S}{d_0 - r}\,.$$

Nové kondenzátory budou zapojeny sériově. Přitom se jejich velikosti skládají stejně, jako se skládají odpory v paralelním zapojení. Výsledná kapacita potom bude

$$C = \frac{C'^2}{C' + C'} = \frac{1}{2}C' = \frac{\varepsilon S}{d_0 - r}\,.$$

V původním LC obvodu tekl oběma součástkami stejný proud, zatímco na nich bylo opačné napětí. To vede na diferenciální rovnici

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC_0} I = 0\,.$$

Jejím řešením jsou nějaké komplexní exponenciály, obecně

$$I = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\,,$$

kde A, B jsou nějaké konstanty a ω_0 je úhlová frekvence

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\,.$$

Pro situaci po vložení desky zřejmě dostaneme zcela stejné rovnice, akorát místo původní kapacity C_0 musíme dosadit výraz spočítaný výše. Můžeme tak psát výsledek

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \sqrt{1-\frac{r}{d_0}} = \sqrt{\frac{7}{8}} \doteq 0{,}94\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha FE ... vánoční sněhulák reloaded reloaded

Jaký bude moment setrvačnosti homogenního sněhuláka s nekonečným počtem koulí, jejichž poloměry tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 1/2 a jejichž středy jsou na jedné přímce, kolem osy přecházející jeho vrcholem a kolmé na spojnici středů koulí? Největší koule má poloměr R a hmotnost celého sněhuláka je M. *Matúš má velmi rád sněhuláky.*

Moment zotrvačnosti bude mať tvar $I = kMR^2$, kde k je konštanta. Hmotnosť snehuliaka závisí od tretej mocniny R, takže moment zotrvačnosti bude úmerný R^5. Moment zotrvačnosti snehuliaka si rozdelíme na 2 časti: moment zotrvačnosti najväčšej gule I_o a moment zotrvačnosti zvyšku I_z, ktorých súčet musí dávať pôvodný moment zotrvačnosti

$$I = I_o + I_z\,.$$

Moment zotrvačnosti najväčšej gule vypočítame pomocou Steinerovej vety ako

$$I_o = \frac{2}{5}mR^2 + md^2$$

kde d je vzdialenosť stredu najväčšej gule od vrchola a m je jej hmotnosť. Výšku snehuliaka dostaneme ako súčet priemeru najväčšej gule a výšky zvyšku snehuliaka. Môžme si všimnúť, že zvyšok snehuliaka je rovnaký, ako keby sme pôvodnému snehuliakovi zmenšili všetky rozmery na polovicu, takže aj jeho výška bude polovica výšky pôvodného snehuliaka. Priemer najväčšej gule je $2R$, čo nám dáva výšku snehuliaka $4R$ a vzdialenosť stredu najväčšej gule od vrchola $d = 3R$. Keďže rozmery zvyšku snehuliaka sú polovičné oproti pôvodnému a moment zotrvačnosti závisí od R^5, tak moment zotrvačnosti zvyšku snehuliaka bude 32-krát menší ako moment zotrvačnosti pôvodného snehuliaka. A pretože hmotnosť je úmerná R^3, tak hmotnosť zvyšku bude 1/8 hmotnosti celého snehuliaka, čiže hmotnosť najväčšej gule bude $m = 7/8M$. Po dosadení všetkého do prvej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{8}MR^2 + \frac{7}{8}M\left(3R\right)^2 + \frac{I}{32}\,,\\ \frac{31}{32}I &= \frac{329}{40}MR^2\,,\\ I &= \frac{1\,316}{155}MR^2\,. \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že zďaleka najväčší príspevok k momentu zotrvačnosti má najväčšia guľa - ak by v jej strede bola celá hmotnosť snehuliaka, dostali by sme odhad $I \approx 9MR^2$, zatiaľ čo $k \doteq 8{,}49$.

Matúš Kopunec
`matus.kopunec@fykos.cz`

Úloha FF ... analytický hopík

Vašek si rád hraje s hopíky, konkrétně se zajímá o jejich koeficient restituce. Rozhodl se, že hopík otestuje ve větším měřítku, a tak ho chce vyhodit z patnáctého patra koleje ve výšce $h_1 = 50\,\mathrm{m}$ nad zemí pod náhodným úhlem. Ve dvacátém patře (ve výšce $h_2 = 65\,\mathrm{m}$) však sedí správce koleje, jemuž by se určitě nelíbilo, kdyby viděl, jak někdo vyhazuje věci z oken na příchodovou cestu. Jelikož se správce z okna nevyklání, vidí směrem dolů pouze pod úhlem $\alpha = 60^\circ$ vůči vodorovnému směru. Jakou rychlostí může Vašek hopíky házet, aby je pan správce nikdy nemohl zahlédnout v letu (před prvním dopadem na zem)?

Zaveďme si súradnicovú sústavu, ktorej y-ová os je stena budovy a x-ová leží na zemi. Potom predpis priamky, ktorá ohraničuje to, čo domovník vidí, je $y = h_2 - x \operatorname{tg} \alpha$. Ďalej potrebujeme určiť trajektóriu hopíku v závisloti od počiatočnej rýchlosti v a uhla φ, pod ktorým ho Vašek hodí. Uhol φ si definujeme ako uhol zovretý počiatočnou rýchlosťou a vodorovným smerom, presne tak, ako je definovaný α (čiže φ je kladný keď Vašek hodí hopík nižšie ako vodorovne). Potom sa jedná o obyčajný šikmý vrh a nie je ťažké vyjadriť, že súradnice hopíku v čase t od hodenia budú

$$x = tv\cos\varphi\,,$$
$$y = h_1 - tv\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Nás ale v tomto prípade závislosť na čase vôbec nezaujíma. Naopak nás zaujíma závislosť y a x, takže si z prvej rovnice vyjadríme t ako funkciu x a dosadíme do druhej

$$y = h_1 - x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi}\,.$$

Môžeme si teda nájsť prienik hopíkovej trajektórie s priamkou, ktorá ohraničuje domovníkov výhľad. Matematicky hľadáme také x, pre ktoré sa oba y rovnajú

$$h_2 - x\operatorname{tg}\alpha = h_1 - x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi}\,,$$
$$0 = x^2\frac{g}{2v^2\cos^2\varphi} + x\left(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha\right) + h_2 - h_1\,.$$

To je kvadratická rovnica. Ak bude jej diskriminant kladný, znamená to, že hopík prejde hranicou domovníkovho výhľadu 2 krát (čiže raz dnu a raz von), čo nechceme. Hraničný prípad je teda diskriminant rovný 0, vtedy sa hopík akurát dotkne hranice domovníkovho výhľadu.

Označme si teda $v_0(\varphi)$ rýchlosť, pri ktorej bude diskriminant pre daný uhol φ nulový. Dostávame rovnicu

$$\left(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha\right)^2 - 4\frac{g}{2v_0(\varphi)^2\cos^2\varphi}\left(h_2 - h_1\right) = 0\,.$$

Vyjadríme si

$$v_0(\varphi)^2 = \frac{2g(h_2 - h_1)}{\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha)^2}\,. \tag{1}$$

Zadanie od nás chce maximálne v také, že pre žiadne φ nevletí domovníkovi do výhľadu. Hľadaná rýchlosť je teda najmenšie $v_0(\varphi)$.

Pravá strana (1) je vždy nezáporná, takže ak chceme minimalizovať $v_0(\varphi)$, stačí nám minimalizovať jej druhú mocninu. Navyše čitateľ je nezávislý od φ, čiže nám stačí maximalizovať menovateľa. Položíme teda jeho deriváciu podľa φ rovnú 0. Následnými úpravami dostávame rovnicu

$$(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha)\,((\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha)\cos\varphi\sin\varphi - 1) = 0\,.$$

Jedno riešenie je určite $\varphi = \alpha$, tam má ale pri pohľade späť na (1) menovateľ hodnotu 0. Fyzikálne to má ten význam, že ak Vašek hodí hopík rovnobežne s domovníkovým výhľadom (alebo ešte strmšie), môže ho hodiť ľuboľnou rýchlosťou. To ale presne nie je prípad, ktorý nás zaujíma, teda nulová musí byť tá druhá zátvorka. Ďalšími úpravami dostaneme podmienku

$$\cos\varphi\,(\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi + \cos\varphi) = 0\,.$$

Pre $\cos\varphi = 0$ dostávame 2 možné uhly: $90\,^\circ$ (kolmo dole), ten nás nezaujíma presne z toho istého dôvodu ako α a $-90\,^\circ$ (kolmo hore). Čiže nie je ťažké dopočítať, že $v_0(-90^\circ) = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$.

Podmienku $\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi + \cos\varphi = 0$ vieme upraviť do tvaru

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{cotg}\alpha\,.$$

Potom $\varphi = -30\,^\circ$ (nahor pod uhlom $30\,^\circ$). Keď tento uhol dosadíme do (1), dostávame

$$v_0(-30^\circ) = \sqrt{\frac{2g\,(h_2 - h_1)}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{2}g\,(h_2 - h_1)}\,,$$

čo je menej ako $v_0(-90^\circ)$, čiže to je hľadaná rýchlosť.

Po dosadení hodnôt dostávame $v_0(-30^\circ) = 8{,}58\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FG ... hokejky

Jirka s Jáchymem si chtěli zasoutěžit v hokejové střelbě. Oba dva stříleli ze středu hřiště ve vzdálenosti $l = 19{,}50\,\mathrm{m}$ od brány. Jirka se rozhodl pro střelu po ledu doprostřed brány o rychlosti $v_0 = 20{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, Jáchym střílel do levé šibenice (tzn. levého horního rohu brány) rychlostí u. Čirou náhodou oba dva vstřelili gól za stejný čas t od vystřelení puku. Vypočtěte rychlost u Jáchymovy střely. Rozměry hokejové brány jsou $1{,}830\,\mathrm{m} \times 1{,}220\,\mathrm{m}$ (šířka × výška), součinitel smykového tření ledu je $f = 0{,}150$ a hmotnost puku je $m = 170{,}0\,\mathrm{g}$. Výsledek uveďte v $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na 4 platné číslice.

Jirka sledoval hokej.

Puk o hmotnosti m při posuvném pohybu po ledu vyvolá třecí sílu $F_\mathrm{t} = fmg$. Pohybuje se tedy se zrychlením $a = -fg$ a v případě počáteční rychlosti v_0 řešíme rovnici

$$l = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}fgt^2\,.$$

Z této kvadratické rovnice si vyjádříme čas od vystřelení puku do vstřelení gólu

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2fgl}}{fg}\,.$$

Pokud bychom dosadili $l = 0$, měli bychom zřejmě dostat nulový čas. To je splněno pouze pro kořen s $-$, proto budeme dále uvažovat

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2fgl}}{fg} \doteq 1{,}012\,7\,\mathrm{s}\,.$$

Pro trajektorii střely do šibenice platí

$$x = u\ t\cos\alpha\,,$$
$$y = u\ t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde α je odklon vektoru rychlosti od vodorovné roviny, y je výška brány a pro vodorovnou vzdálenost platí

$$x = \sqrt{l^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \doteq 19{,}52\,\mathrm{m}\,,$$

kde b označuje šířku brány. Po dosazení za u z první rovnice do druhé dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{x}\,,$$
$$\alpha \doteq 17{,}75\,^\circ\,.$$

Nyní už jen stačí z první rovnice vyjádřit hledanou rychlost

$$u = \frac{x}{t\cos\alpha} \doteq 20{,}24\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Povšimněme si, že hmotnost puku m jsme ve finále k výpočtu vůbec nepotřebovali.

Jiří Vala
`j.vala@fykos.cz`

Úloha FH ... zeměplochá reloaded reloaded

Jak všichni dobře víme, Země je placka, kterou na zádech nesou sloni. Nad ní je pak klenba, na které jsou zavěšené Slunce, stálice i Měsíc. Pokud bychom k upevnění měsíce o hmotnosti $7{,}348 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ *použili ocelové lano kruhového průřezu, jaký poloměr by muselo mít v bodě uchycení ke klenbě? Délka lana je* $l = 3\,200\,\mathrm{m}$. *Mez pevnosti v tahu oceli je* $700\,\mathrm{MPa}$, *hustota oceli je* $\varrho = 7\,850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Měsíc je v konstantním gravitačním zrychlení o hodnotě* g. *Ostatní gravitační efekty zanedbejte.* *Jáchym má slabost pro reloaded, reloaded úlohy.*

V nejnižším bodě na lano působí pouze tíhová síla mg, kde m je hmotnost Měsíce. V tomto místě bude poloměr lana

$$r_0 = \sqrt{\frac{mg}{\pi\sigma}}\,,$$

kde σ je mez pevnosti.

Označme poloměr lana ve vzdálenosti x jako $r(x)$. Posuneme-li se o malou vzdálenost $\mathrm{d}x$ nahoru, hmotnost lana pod námi se zvýší o $\mathrm{d}m = \pi r^2 \varrho \mathrm{d}x$. Nechť se přitom poloměr zvětší o $\mathrm{d}r$, potom se plocha průřezu zvětší o $\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$. Nyní si stačí uvědomit, že zvýšení hmotnosti zvýší sílu, kterou musí lano unést, o $g\mathrm{d}m$, zatímco zvětšení plochy průřezu zvýší nosnost lana o $\sigma \mathrm{d}S$. Tyto dva výrazy se musí rovnat, tedy dostáváme

$$g\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S\ ,$$
$$\frac{\varrho g}{2\sigma}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}r}{r}\,.$$

Integrálem obou stran dostaneme řešení

$$\int_0^x \frac{\varrho g}{2\sigma}\mathrm{d}x = \int_{r_0}^r \frac{\mathrm{d}r}{r}\,,$$
$$\frac{\varrho g}{2\sigma}x = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \ln\left(r\sqrt{\frac{\pi\sigma}{mg}}\right)\,.$$

Odtud si už snadno vyjádříme

$$r(x) = \sqrt{\frac{mg}{\pi\sigma}}\exp\left(\frac{\varrho g}{2\sigma}x\right)\,.$$

Nás zajímá poloměr ve výšce l, neboli

$$r(l) = \sqrt{\frac{mg}{\pi\sigma}}\exp\left(\frac{\varrho g}{2\sigma}l\right) \doteq 2{,}16\cdot 10^7\,\mathrm{m}\,.$$

Podle očekávání nám vyšel menší poloměr, než v předchozím případě, ačkoli i tentokrát nedává takto silné lano žádný smysl.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha GA ... centrifuga

Do dutého válce s poloměrem podstavy R nalejeme vodu do výšky h_0 a válec potom roztočíme na konstantní úhlovou rychlost. Při jaké úhlové rychlosti bude uprostřed válce výška hladiny nulová? *Matúš chtěl vysušit střed kyblíku.*

Hladina vody opisuje ekvipotenciální plochu, tvořenou tíhovým potenciálem $\varphi_g = gh$ a potenciálem odstředivé síly, který dokážeme určit integrací zrychlení podle vzdálenosti od středu

$$\varphi_\mathrm{o} = -\int_0^r a_\mathrm{o}\mathrm{d}r = -\int_0^r \omega^2 r\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2\,,$$

kde ω je úhlová rychlost. Součet obou potenciálů musí být na hladině konstantní, neboli

$$gh - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = k\,.$$

Z této rovnice si vyjádříme výšku hladiny h jako funkci vzdálenosti od středu r. Neznámou konstantu k dokážeme určit z podmínky zachování objemu vody. Původní objem byl $V = \pi R^2 h_0$. Jelikož nás zajímá situace, ve které je podle rovnice vždy $h \geq 0$ (kde rovnost nastane právě pro $r = 0$), můžeme objem vody po roztočení válce spočítat integrálem

$$V = \int_0^R \mathrm{d}V = \int_0^R 2\pi r \mathrm{d}r h = \int_0^R \frac{2\pi r}{g}\left(k + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi R^2}{g}\left(k + \frac{1}{4}\omega^2 R^2\right) .$$

Porovnáním tohoto výsledku s původním vzorcem pro objem dostáváme

$$k = gh_0 - \frac{1}{4}\omega^2 R^2 ,$$

$$h = h_0 + \frac{\omega^2}{4g}\left(2r^2 - R^2\right) .$$

Dosazením $r = 0$, $h(r = 0) = 0$ už snadno najdeme výslednou úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{gh_0} .$$

Matúš Kopunec
`matus.kopunec@fykos.cz`

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha GB ... pijeme čaj 2.0

Mějme válcovou nádobu s výškou H a podstavou s poloměrem R, která je naplněná čajem s hustotou ϱ. V boční stěně je na spodku nádoby otvor, ke kterému je připevněná na konci špuntem uzavřená vodorovná válcová výtoková trubice s manometrickou trubicí. Obě trubice mají poloměr r. Vzdálenost mezi stěnou nádoby a manometrickou trubicí je a, vzdálenost mezi manometrem a výtokovým otvorem je b. Určete závislost výšky kapaliny v manometrické trubici $h(t)$ na času od odstranení špuntu. Předpokládejte, že se tato výška okamžitě přizpůsobuje tlaku ve výtokové trubici. Čaj má dynamickou viskozitu η a povrchové napětí σ. Uvažujte laminární proudění v trubici a $r \ll a, b \ll H, R$.

Nápověda *Pro laminární proudění ve válcové trubici platí Poiseuillův vztah*

$$\Delta p = \frac{8\eta l Q}{\pi R^4} ,$$

kde R je poloměr trubice, l je její délka, Q je objemový tok a Δp je rozdíl tlaků na jejích koncích.

Dodo se v menze chronicky zamýšlí místo toho, aby jedl.

Do Poiseuillova vztahu dosadíme za přetlak mezi začátkem a koncem výtokové trubice hydrostatický tlak na dně nádoby $H\varrho g$ a dostaneme

$$H\varrho g = \frac{8\eta\,(a + b)\,Q}{\pi r^4} .$$

Z rovnice kontinuity vyplývá, že výtok Q musí odpovídat snižování hladiny v nádobě podle vztahu

$$Q = -\pi R^2 \dot{H} .$$

Dosazení do předchozího vztahu vede na jednoduchou separovatelnou diferenciální rovnici

$$\dot{H} = -\frac{\varrho g r^4}{8\eta\,(a+b)\,R^2} H\,,$$

jejímž řešením je

$$H(t) = H_0 \exp\left(-\frac{\varrho g r^4}{8\eta\,(a+b)\,R^2} t\right)\,.$$

Přetlak vůči atmosférickému tlaku zřejmě mezi začátkem a koncem trubice lineárně klesá od $h\varrho g$ k nule. Přetlak na dně manometrické trubice bude

$$\Delta p_b = \frac{b}{a+b} \Delta p\,.$$

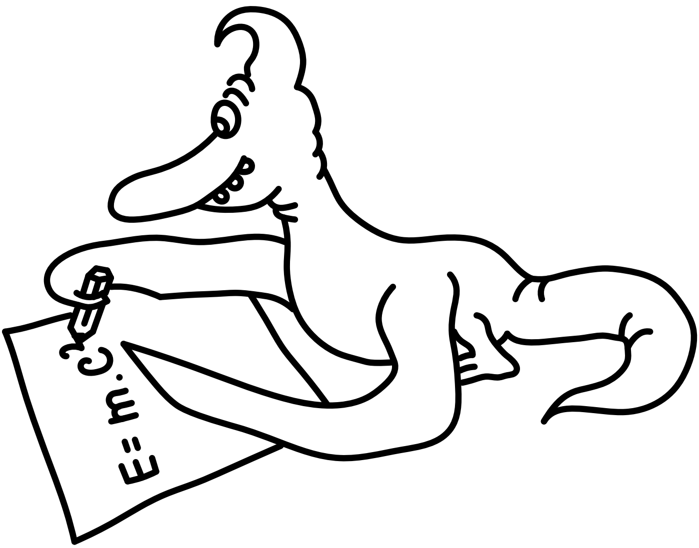
Tlak v manometrické trubici dále zvyšuje kapilární tlak

$$p_\mathrm{k} = \frac{2\sigma}{r}\,.$$

Pro závislost výšky hladiny čaje v trubici na čase tak platí

$$h(t) = \frac{1}{\varrho g}\left(p_\mathrm{k} + \Delta p_b\right) = \frac{2\sigma}{r\varrho g} + \frac{b}{a+b} H_0 \exp\left(-\frac{\varrho g r^4}{8\eta\,(a+b)\,R^2} t\right)\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.