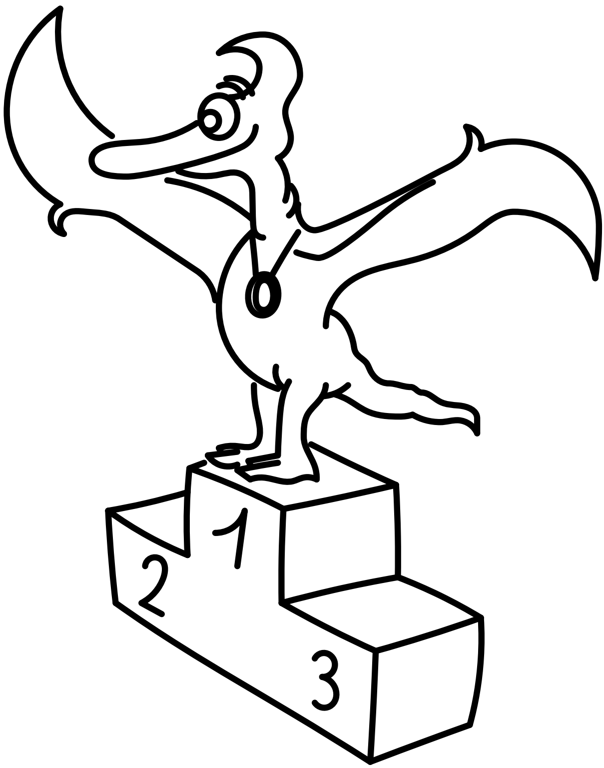
Řešení úloh 12. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha AA ... auto byste neukradli

Stahujeme z internetu (legálně) film o velikosti 2,1 GB *rychlostí* 350 kB·s^{-1}. *Délka filmu je* 90 min. *Po jaké době od začátku stahování si můžeme film pustit, abychom ho mohli zhlédnout bez přerušení?* *Mirek si nechtěl připlatit (za rychlejší stahování).*

Celková doba stahování filmu je $2{,}1\,\mathrm{GB}/350\,\mathrm{kB{\cdot}s^{-1}} = 100\,\mathrm{min}$. Na film se můžeme začít dívat 90 min před koncem stahování. Musíme tedy počkat $100\,\mathrm{min} - 90\,\mathrm{min} = 10\,\mathrm{min}$ od začátku stahování, než si film pustíme.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha AB ... jednoduchý dopravník

Máme dopravník, který má sám o sobě hmotnost M. V čase 0 s *je na něm písek o celkové hmotnosti m a začne z něj padat s konstantní hodnotou hmotnosti za čas, kterou označíme μ (jednotkou je kilogram za sekundu). Jaká síla by musela působit na dopravník v čase t (od* 0 s *do chvíle, než z dopravníku spadne všechen písek), aby se dopravník pohyboval s* ***konstantním zrychlením*** *a?* *Karel zjednodušil úlohu. Na těžší variantu se můžete těšit v budoucnu.*

Vzpomeneme si nejprve na druhý Newtonův zákon, který nám říká, že $F = m_{\mathrm{celk}}a$, kde F je síla a m_{celk} je celková hmotnost tělesa. Jakou máme hmotnost tělesa v našem případě? Sice je proměnlivá s časem, ale můžeme ji snadno vyjádřit jako $m_{\mathrm{celk}} = M + m - \mu t$, protože od hmotnosti dopravníku M sečtené s již naloženým pískem m se postupně odebírá hmotnost odpadávajícího písku, která má v čase t hodnotu μt. Síla, kterou musíme na dopravník působit tedy bude $F = (M + m - \mu t)\,a$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AC ... upuštěná bankovka

Vyplatilo by se Billu Gatesovi zvednout ze země \$100 bankovku? Dejme tomu, že průměrně za jeden rok vydělá v přepočtu 30 miliard korun a po dobu 3 s *zvedání bankovky by byl přerušen jeho průměrný plat. Kolik korun tak vydělá? Pokud prodělá, uveďte záporné znaménko. Počítejte s kurzem* 1 Kč = \$0,046 *a s tím, že jeho příjem je nepřetržitý a konstantní.*
Matěj rád krade a zapomíná kde.

Po převedení na dolary dělá jeho roční příjem přibližně \$1 380 000 000. Vydělíme-li to počtem sekund v roce, získáme jeho průměrnou rychlost bohatnutí \$43,7 s^{-1}. To dělá ztrátu 131.3 dolarů za tři sekundy nepracování. Z toho vyplývá, že se mu opravdu nevyplatí shýbat se pro \$100 bankovku. Za zvednutí stodolarovky tedy prodělá \$31,3, což je 680 Kč.

Ovšem pro \$200 nebo \$500 by se mu už zvedání vyplatilo. Z českých bankovek by se mu vyplatilo zvednout pouze pětitisícovku.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha AD ... z nuly na sto poprvé

Jako jedna z výkonnostních charakteristik automobilů se často udává doba, za jakou zvládnou zrychlit z $0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *na* $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$*. Vezměme si jako příklad auto, které to dokáže za* $4{,}0\,\mathrm{s}$*. Jakou dráhu by urazilo auto v průběhu zrychlování, pokud v průběhu této doby zrychluje s konstantním zrychlením?* *Karel přemýšlel nad zrychlením aut.*

Pro dráhu s uraženou při rovnoměrně zrychleném pohybu za čas t se zrychlením a platí vztah $s = at^2/2$. Zrychlení je v našem případě

$$a = \Delta v/\Delta t = 100/4/3{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 6{,}94\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Uražená dráha bude

$$s = \frac{1}{2}\Delta v \cdot \Delta t \doteq 55{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Auto v průběhu zrychlování za předpokladu konstantního zrychlení urazí 56 m.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AE ... koupeme se ve vaně

Dano si napouští vanu tak, že do ní nejdříve napustí horkou vodu o teplotě $t_1 = 52\,^\circ\mathrm{C}$*. Protože je moc horká, tak ji pak naředí vodou o teplotě* $t_2 = 18\,^\circ\mathrm{C}$*. Ideální teplota vody je pro něj* $t = 42\,^\circ\mathrm{C}$ *(což není úplně vhodná teplota, ale on to rád horké). V jakém poměru objemů* $K = V_2/V_1$ *vodu do vany dolívá, pokud zanedbáme tepelnou kapacitu vany a to, že dochází k tepelné výměně s okolím? Objem* V_1 *přísluší vodě o teplotě* t_1*.* *Karel se rád koupe ve vaně.*

Mohli bychom si napsat kalorimetrickou rovnici, ale pokud si uvědomíme, že za určitých předpokladů jde vlastně o jednoduchou úvahu, tak si ji ani nebudeme rozepisovat. Předpokládáme, že tepelná kapacita vody je v rámci teplotního rozpětí od t_2 do t_1 konstantní a že voda v tomto teplotním intervalu má konstantní objem. Pak můžeme psát, že výsledná teplota bude pouze váženým průměrem teplot jednotlivých vod, a to takto:

$$t = \frac{V_1 t_1 + V_2 t_2}{V_1 + V_2}\,.$$

Tuto rovnici stačí pak jednoduchými úpravami převést do tvaru V_2/V_1,

$$t\,(V_1 + V_2) = V_1 t_1 + V_2 t_2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{V_2}{V_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t} = \frac{5}{12} \doteq 0{,}42\,.$$

Poměr objemů, na který jsme se ptali, je $K = 0{,}42$. To znamená, že musí myslet na to, že až bude dopouštět vanu, tak potřebuje ještě 42 % místa toho, co napustí. Jinak řečeno potřebuje napustit vanu nejprve teplou vodou na $12/17 \doteq 70{,}5\,\%$ požadovaného objemu, aby ji tak akorát ochladil dopuštěním studené vody.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AF ... srovnání výhřevnosti

Jak se liší výhřevnost litru motorové nafty a litru autobenzínu? Víme, že výhřevnost nafty je $H_\mathrm{d} = 42{,}6\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$ *a výhřevnost benzínu je* $H_\mathrm{p} = 43{,}6\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$*. Hustota našeho benzínu je* $\varrho_\mathrm{p} = 740\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a nafty pak* $\varrho_\mathrm{d} = 840\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*. Zajímá nás,* ***co má vyšší*** *výhřevnost na litr a* ***o kolik****?*

Karel přemýšlel, jestli je nafta výhodnější.

Pokud známe výhřevnost udanou v jednotkách energie na hmotnost, pak nám stačí vynásobit tuto hodnotu hustotou dané látky a získáme výhřevnost v energii na objem. Musíme si akorát dát pozor na to, že nás zajímají výhřevnosti a tedy potažmo energie ukryté pouze v jednom litru. Označme si tedy výhřevnost jednoho litru jako E_d, resp. E_p a objem jednoho litru jako $V = 1\,\mathrm{l} = 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$. Dostáváme

$$E_\mathrm{d} = H_\mathrm{d}\varrho_\mathrm{d}V \doteq 35{,}8\,\mathrm{MJ}\,, \quad E_\mathrm{p} = H_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{p}V \doteq 32{,}3\,\mathrm{MJ}\,,$$
$$E_\mathrm{d} - E_\mathrm{p} = (H_\mathrm{d}\varrho_\mathrm{d} - H_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{p})\,V \doteq 3{,}5\,\mathrm{MJ}$$

Větší výhřevnost má jeden litr nafty než jeden litr benzínu a to o $E_\mathrm{d} - E_\mathrm{p} \doteq 3{,}5\,\mathrm{MJ}$, resp. v měrných jednotkách je výsledek $3{,}5\,\mathrm{MJ{\cdot}l^{-1}}$.

Nad tím, proč je obvykle benzín dražší, když se ho obvykle spotřebuje více, což potvrzuje i tento výpočet, raději ani nechceme spekulovat.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AG ... problém pásového cestujícího

Na letišti v Dubaji jsou jezdící chodníky, které jezdí rychlostí v. Matěj se potřebuje dostat na terminál B27. Může jít buď přímo nebo o 1/3 delší cestou, ale půlku z této delší cesty by mohl jít po jezdícím chodníku. Po několikaminutovém počítání zjistí, že mu obě cesty zaberou stejně času a tak se rozhodne jít po pojízdném chodníku, protože je to sranda. Určete Matějovu konstantní rychlost chůze u.

Matěj miluje jezdící pásy.

Označme si přímou vzdálenost od terminálu s. Přímá cesta trvá čas

$$t = \frac{s}{u}\,.$$

Na druhé cestě musí ujít $\frac{2}{3}s$ sám rychlostí u a $\frac{2}{3}s$ bude mít rychlost $v + u$. To bude tedy trvat čas

$$t = \frac{2}{3}\frac{s}{u} + \frac{2}{3}\frac{s}{v+u}\,.$$

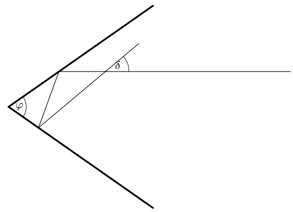
Vyjdeme z rovnosti časů a můžeme vyjádřit u,

$$\frac{s}{u} = \frac{2s}{3u} + \frac{2s}{3(v+u)}\,,$$
$$\frac{1}{3u} = \frac{2}{3(v+u)}\,,$$
$$u = v\,.$$

Matějova rychlost je tedy stejná jako rychlost jezdícího pásu.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha AH ... zkřížená zrcadla



Paprsek světla se odráží od dvou rovinných zrcadel (podobně jako na obrázku, obrázek je ilustrační). Paprsek se od každého zrcadla odrazí právě jednou. Zrcadla mezi sebou svírají úhel φ. Jak závisí úhel δ znázorněný v obrázku na úhlu φ?

Daniel se učil na zápočet z optiky.

Označme α úhel mezi paprskem a prvním zrcadlem a β úhel mezi paprskem a druhým zrcadlem. Pro levý trojúhelník platí $\alpha + \beta + \varphi = \pi$. Pro pravý trojúhelník dostáváme

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \delta = \pi\,,$$

z čehož si snadno vyjádříme $\delta = 2(\alpha + \beta) - \pi$. Posledním krokem je dosazení za $\alpha + \beta$ z prvního vztahu, které vede na $\delta = \pi - 2\varphi$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha BA ... antihmotiánství

Možná jste už slyšeli pověsti o breathariánech a pránistech, kterým stačí dýchat a energii potřebnou k životu „vysávají“ ze svého okolí. Co kdyby ale někdo chtěl být živ z antihmoty? Samozřejmě to nejde, nás však zajímá odhad, jakou minimální hmotnost antihmoty by musel mít takový člověk v sobě, aby mohl žít až do smrti. Uvažujme dospělého dvacetiletého jedince, jehož smrt nastane za 60 let. Výkon, který člověk potřebuje k životu, je $P = 100\,\mathrm{W}$. Hmoty má dostatek a uvažujme, že energii spotřebovává se $100\,\%$ účinností.

Karel přemýšlel, kolik toho asi jeden takový breatharián sní přes noc z ledničky...

Známy (a často nepochopený) vzorec $E = mc^2$ hovorí, že antihmota o hmotnosti m je ekvivalentná energii mc^2. Na to, aby sme túto energiu získali, ale potrebujeme antihmotu anihilovať s rovnakým množstvom hmoty, z ktorej sa uvoľní rovnaká energia. Ak teda máme antihmotu o hmotnosti m a dostatok hmoty, môžeme získať energiu $2mc^2$.

S výkonom P za čas $t \doteq 1{,}9 \cdot 10^9$ s spotrebujeme energiu $E = Pt$, z čoho dostaneme

$$m = \frac{Pt}{2c^2} \doteq 1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{mg}\,.$$

Na ľudské pomery je to mizivé množstvo, ale antihmoty je to absurdne veľa – ak by sme napr. chceli zbierať antihmotu vznikajúcu aktuálnou rýchlosťou pri časticových experimentoch, trvalo by nám asi sto miliónov rokov vyrobiť toľko antihmoty.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha BB ... meziplanetární kyvadlo

Označme poměr hmotnosti Země a Měsíce a. Poměr jejich poloměrů označíme b. Platí $a > 1$& $b > 1$. Jaký bude poměr period určitého kyvadla na povrchu Země a Měsíce? (Chceme závislost pouze na a a b).

Matěj má rád písničku Organism Do Evolve.[1]

[1] https://www.youtube.com/watch?v=dx-Sy5M3bME

Periodu kyvadla můžeme vypočítat podle vztahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Jednalo-li by se o fyzikální kyvadlo, byl by tento vztah jen násobený konstantou závislou na momentu setrvačnosti. Zajímá nás tedy poměr gravitačních zrychlení na povrchu Země a Měsíce. Gravitační zrychlení lze vyjádřit podle vzorce

$$g = G\frac{M}{R^2}\,.$$

Poměr gravitačních zrychlení je $\frac{g_\mathrm{Z}}{g_\mathrm{M}} = \frac{GM_\mathrm{Z}R_\mathrm{M}^2}{GM_MR_\mathrm{Z}^2} = \frac{a}{b^2}$, kde dolní indexy značí Zemi, resp. Měsíc.

Poměr period je pak odmocninou z obráceného poměru zrychlení

$$\frac{T_\mathrm{Z}}{T_\mathrm{M}} = \sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{b}{\sqrt{a}}\,.$$

Což pro Zemi a Měsíc mimochodem vychází přibližně 0,41.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha BC ... nabité kuličky

Dvě nepružná vlákna zanedbatelné hmotnosti s délkou $l = 1{,}0\,\mathrm{m}$ jsou zavěšené ve stejném bodě ve výšce $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$ nad zemí. Nejprve na konec jednoho vlákna zavěsíme kovovou kuličku s hmotností m a nábojem $Q = 2{,}8\,\mathrm{\mu C}$. Pak na konec druhého vlákna zavěsíme stejnou kuličku se stejným nábojem. Kuličky se elektricky odpudí a zaujmou rovnovážnou polohu, přičemž jejich výška nad podlahou se zvýší o $\Delta h = 3{,}0\,\mathrm{cm}$. Jaká je hmotnost jedné kuličky? Výsledek uveďte zaokrouhlený na dvě platné cifry. *Danku fascinují kuličky.*

V rovnovážnej polohe sústavy guličiek zvierajú jednotlivé vlákna so zvislým smerom uhol α. Ťahová sila vlákna, ktorá drží guličku na mieste, pôsobí proti výslednici tiažovej a odpudivej elektrickej sily pôsobiacej na guličku. Ťiažová sila pôsobiaca na guličku je

$$F_g = mg\,.$$

Elektrická sila, ktorou pôsobí jedna gulička na druhú závisí okrem náboja guličiek aj na ich vzájomnej vzdialenosti d

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q^2}{d^2}\,.$$

Túto vzájomnú vzdialenosť vypočítame ako

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = l^2 - (l-\Delta h)^2 \qquad \Rightarrow \qquad d = 2\sqrt{2l\Delta h - (\Delta h)^2}\,.$$

Keďže sila vlákna kompenzuje výslednicu síl F_g a F_e, má opačný smer, z čoho vyplýva vzťah

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_e}{F_g}\,.$$

Uhol α, dokonca aj jeho tangens vieme vyjadriť z rovnice

$$\cos\alpha = \frac{l-\Delta h}{l}\,, \quad \sin\alpha = \frac{d}{2l}\,.$$

Teda

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2(l-\Delta h)}\,.$$

Potom máme

$$\frac{d}{2(l-\Delta h)} = \frac{F_e}{F_g}\,,$$
$$\frac{d}{2(l-\Delta h)} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon m g d^2}\,.$$

Odtiaľ vyjadríme hmotnosť m

$$m = \frac{Q^2(l-\Delta h)}{2\pi\varepsilon g d^3}\,,$$
$$m = \frac{Q^2(l-\Delta h)}{16\pi\varepsilon g\left(2l\Delta h - (\Delta h)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \doteq 120\,\mathrm{g}\,.$$

Hmotnosť jednej guličky je približne 120 g.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha BD ... nový rozměr

S využitím rozměrové analýzy nalezněte vztah pro dynamickou viskozitu η s použitím Boltzmannovy konstanty k_B, termodynamické teploty T, hmotnosti molekuly m, charakteristického srážkového poloměru r a bezrozměrné konstanty C.
Nápověda: *Rozměr dynamické viskozity je* Pa·s. *Tomáš uzřel rozměr světa bez konstant.*

Pro dynamickou viskozitu hledáme vztah ve tvaru $\eta = C k_B^\alpha T^\beta m^\gamma r^\delta$. Rozepsáním jednotlivých rozměrů v základních jednotkách získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\cdot s}} = C\left(\frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s^2\cdot K}}\right)^\alpha \mathrm{K}^\beta \mathrm{kg}^\gamma \mathrm{m}^\delta\,.$$

Porovnáním jednotlivých mocnin získáme soustavu rovnic

$$1 = \alpha + \gamma\,,$$
$$0 = -\alpha + \beta\,,$$
$$-1 = 2\alpha + \delta\,,$$
$$-1 = -2\alpha\,.$$

Odtud získáme výsledný vztah pro dynamickou viskozitu

$$\eta = C\frac{\sqrt{k_B T m}}{r^2}\,.$$

Získali jsme takto vzorec, který nám může říci něco o chování kapaliny, a to snadno a bez nějakého složitého odvozování. Nicméně takto bohužel nemůžeme nikdy určit hodnotu konstanty C. Ta se ovšem dá případně zjistit experimentálně.

Tomáš Hrbek
`tomash@fykos.cz`

Úloha BE ... odporná krychle

Máme plnou homogenní kovovou krychli s délkou hrany a odporem R v zapojení mezi protějšími stěnami. Jaký odpor bude mít krychle ze stejného materiálu ve stejném zapojení ale s délkou hrany b? Krychle připojujeme do obvodu pomocí desek z dokonalého vodiče dokonale přiléhající ke dvěma protějším stěnám. *Karel házel kostkami.*

Výsledek určíme jednoduchou úvahou. Odpor je jednak závislý přímo úměrně na délce vodiče – bude tedy b/a-násobný, pokud se krychle jenom prodlouží na kvádr o rozměrech $a \cdot a \cdot b$ ve směru prodloužené hrany. Na druhou stranu je odpor nepřímo úměrný průřezu vodiče. Z toho vyplývá, že odpor kvádru s rozměry $b \cdot b \cdot a$ bude

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 R\,.$$

Celkově pak odpor krychle se stranou b vyjádřený pomocí a a R je

$$R' = \frac{a}{b} R\,.$$

Pokud tedy krychli zvětšíme, její odpor bude nižší.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BF ... vířivka pro Janap

Janap se chtěla ponořit do vířivky, co by měla teplotu alespoň $T_2 = 35\,^\circ\mathrm{C}$. Z vodovodního kohoutku ale tekla voda, která měla jenom $T_1 = 18\,^\circ\mathrm{C}$. Janap si říkala, že by bylo zajímavé ohřát vodu tak, že by ji vypustilo letadlo z nějaké výšky h a voda by dopadla do vířivky už ohřátá. Uvažujte, že letadlo vypustí vodu z klidu z výšky h a že všechna energie se v průběhu pádu přemění na teplo kapek vody. Z jaké výšky by pak letadlo mělo vypustit vodu? Předpokládejte, že tíhové zrychlení je $g = 9{,}81\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$. Nějaké další užitečné konstanty mohou být měrná tepelná kapacita vody $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, gravitační konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}$, poloměr Země $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$, hmotnost Země $M_\mathrm{Z} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Na objem a hmotnost vířivky a Janapky se radši neptejte. *Karel vzpomínal na Janapku.*

Potenciální energie tělesa o hmotnosti m ve výšce h nad Zemí je

$$E \approx mgh\,.$$

Teplo potřebné pro zahřátí vody je

$$Q = mc\Delta T\,,$$

kde $\Delta T = T_2 - T_1$. Dáme do rovnosti toto teplo a rozdíl potenciálních energií.

$$mgh = mc\Delta T\,,$$

$$h = \frac{c\Delta T}{g} \doteq 7\,300\,\mathrm{m}\,.$$

Ve výšce h nad zemským povrchem je tíhové zrychlení $g' = \frac{GM_Z}{(R_Z+h)^2} = 9{,}77\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}} \approx g$, tedy náš jednodušší model poskytuje dobrý odhad. Voda by musela být vypuštěna z výšky $7\,300\,\mathrm{m}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BG ... rtuťový sloupec

Úzká válcová trubice délky $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$ je z poloviny ponořena do nádoby s rtutí o hustotě $\varrho = 13{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Vyčnívající konec uzavřeme a trubici vytáhneme svisle vzhůru. Část rtuti vyteče. Jak dlouhý sloupec rtuti zůstane v trubici? Atmosférický tlak je $p_a = 101\,\mathrm{kPa}$.
Nápověda: *Uvažujte izotermickou expanzi.* *Vašek není schopen vymyslet původ úlohy.*

Na sloupec rtuti, který zůstal v trubici, působí tíhová síla F_g, tlaková síla atmosféry F_a a síla od uzavřeného vzduchu v trubici F_v. Ze statické rovnováhy sil plyne rovnost

$$F_g + F_v = F_a\,.$$

Tlaková síla je dána součinem plochy a tlaku na ni působící, odtud plyne

$$mg + p_v S = p_a S\,,$$

kde m je hmotnost rtuti, g je tíhové zrychlení, p_v je tlak uzavřeného vzduchu a S je průřez trubice. Pro hmotnost platí $m = Sx\varrho$, kde x je výška sloupce. Celkově s malou úpravou dostaneme

$$p_a - p_v = \varrho x g\,. \tag{1}$$

Uzavřený plyn se při vytékání rtuti izotermicky rozpíná. Z Boyleova–Mariottova zákona plyne

$$p_a S \frac{l}{2} = p_v S\,(l - x)\;.$$

Odtud vyjádříme tlak

$$p_v = p_a \frac{l}{2\,(l - x)}\,,$$

který dosadíme do rovnice (1) a algebraickou úpravou získáme kvadratickou rovnici

$$2\varrho g x^2 - 2\,(p_a + l\varrho g)\,x + p_a l = 0\,.$$

Fyzikální význam má řešení

$$x = \frac{1}{2}\left(l + \frac{p_a}{\varrho g} - \sqrt{\left(\frac{p_a}{\varrho g}\right)^2 + l^2}\right)\,.$$

Po číselném dosazení zjistíme, že výška sloupce rtuti, která zůstane v trubici, je $x = 0{,}25\,\mathrm{m}$.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`

Úloha BH ... potopená

Do plavebního kanálu vložíme válcovou nádobu s výškou $h = 15\,\mathrm{cm}$, poloměrem podstavy $r = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ a hmotností $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, jejíž stěny jsou dostatečně tenké. Proud unáší nádobu rychlostí $v = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na dně nádoby je otvor, kterým do něj nateče každou sekundu $V_0 = 25\,\mathrm{ml}$ vody. Jakou dráhu v metrech urazí nádoba, než se potopí pod hladinu?

Danka přemýšlela nad odpadem v řekách.

Objemový tok vody vtekajúcej do nádoby je $Q_v = V_0\,\mathrm{s}^{-1}$. V okamihu, keď sa nádoba potopí pod hladinu, bude vztlaková sila maximálna možná a rovná tiažovej sile pôsobiacej na nádobu a vodu v nej

$$(m + \varrho Q_v t)g = \pi r^2 h \varrho g$$

kde ϱ je hustota vody a t čas natekania vody do nádoby. Vyjadríme t

$$t = \frac{\pi r^2 h\varrho - m}{Q_v \varrho}\,.$$

Za túto dobu prejde nádoba dráhu

$$s = vt \doteq 54{,}25\,\mathrm{m}\,.$$

Nádobu teda prúd pred potopením odnesie $54\,\mathrm{m}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha CA ... procházka na lodi a lá Dan

Daniel, jako správný boháč, vlastní jachtu. Jachta není úplně nejluxusnější a největší, ale je už docela slušná. Její výtlak je $M = 40\,\mathrm{tun}$ (vody) a je dlouhá $D = 20\,\mathrm{m}$. Představme si, že je umístěná v klidné vodní nádrži, je v klidu vůči břehu a Daniel přitom stojí v klidu na její přídi. O kolik se posune loď vůči břehu, pokud po ní Daniel pomalu přejde, odpředu dozadu? Daniel nám nechtěl sdělit přesnou hmotnost, ale počítejte s jeho hmotností $m = 70\,\mathrm{kg}$. Výsledek chceme alespoň na dvě platné cifry.

Karel se díval na Brilliant.

Výtlak vody jachty odpovídá její hmotnosti. Budeme tedy brát, že jachta má hmotnost M. Vzhledem k tomu, že soustava byla na počátku v klidu, musí v průběhu a na konci pohybu být celková hybnost také nulová. Protože se Daniel rozejde z přídě lodi dozadu, musí se loď pohybovat směrem proti němu. Pokud bychom uvažovali, že se Daniel bude pohybovat nějakou rychlostí v, pak ze zákona zachování hybnosti ($0 = mv + MV$) plyne, že se loď bude pohybovat v průběhu jeho chůze rychlostí $V = -mv/M$. To znamená v opačném směru a nepřímo úměrně hmotnosti lodi.

Mohli bychom nějak složitěji počítat dobu, po kterou se bude Daniel pohybovat, a pak ji zase dosadit do jeho rychlosti. Ale stačí si uvědomit, že na rychlosti nebude výsledné posunutí záviset. Daniel se pohybuje prostě od přídě k zádi a vždycky ujde tuto vzdálenost na lodi. Posunutí lodi vůči břehu a Daniela vůči břehu pak musí dát dohromady celou délku lodi. Tedy pokud si to promyslíme, poloha těžiště soustavy loď-Daniel se nezmění a Daniel se musí vůči břehu pohnout o $d_1 = MD/(M + m)$. Loď se proto vůči břehu posune o $d_2 = mD/(M + m) \approx mD/M = 0{,}035\,\mathrm{m} = 3{,}5\,\mathrm{cm}$. Hledanou odpovědí tedy je, že loď se posune o $3{,}5\,\mathrm{cm}$ vůči břehu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CB ... perpetuum mobile druhého druhu

Předpokládejme, že neplatí druhý termodynamický zákon, tedy pro účely této úlohy může teplo přecházet z chladnějšího tělesa na teplejší. Mějme loď, která získává energii tak, že nabírá vodu z moře o teplotě $T_1 = 3{,}2\,°\mathrm{C}$, chladí ji a každou minutu tak vytvoří krychli ledu o teplotě $T_2 = -5{,}0\,°\mathrm{C}$. Jak dlouhá musí být hrana krychle, pokud má loď příkon $P = 0{,}8\,\mathrm{MW}$?

Viktor se nudil na přednášce z termodynamiky.

Označme hranu kocky a, mernú tepelnú kapacitu vody a ľadu $c_\mathrm{v} = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ resp. $c_\mathrm{l} = 2\,100\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, hustotu ľadu $\varrho_\mathrm{l} = 917\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a merné skupenské teplo topenia $l = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$. Za čas $t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ loď získa z vody o hmotnosti $m = \varrho_\mathrm{l} a^3$ energiu

$$E = mc_\mathrm{v}(T_1 - T_\mathrm{t}) + ml + mc_\mathrm{l}(T_\mathrm{t} - T_2)\,,$$

a to postupne ochladením vody na $T_\mathrm{t} = 0°\mathrm{C}$, zmrazením na ľad a ochladením ľadu.

Energia získaná za čas musí byť rovná potrebnému príkonu, teda

$$P = \frac{E}{t} = \frac{\varrho_\mathrm{l} a^3}{t}\left(c_\mathrm{v}(T_1 - T_\mathrm{t}) + l + c_\mathrm{l}(T_\mathrm{t} - T_2)\right)\,,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{Pt}{\varrho_\mathrm{l}}\left(c_\mathrm{v}(T_1 - T_\mathrm{t}) + l + c_\mathrm{l}(T_\mathrm{t} - T_2)\right)^{-1}}\,.$$

Dosadením dostaneme $a \doteq 53\,\mathrm{cm}$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha CC ... planetky

Kolem jedné hvězdy obíhá jedna planetka. Okolo druhé, hodně vzdálené hvězdy, také obíhá jedna planetka, jejíž poloměr oběžné dráhy i perioda jsou třikrát větší. Určete poměr hmotnosti první a druhé hvězdy. *Matěj rád poměry.*

Vyjdeme z rovnosti odstředivé a gravitační síly

$$\frac{GM}{R^2} = m\omega^2 R\,,$$

kde M je hmotnost hvězdy, m je hmotnost planety, R je poloměr orbity, G je gravitační konstanta a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je úhlová rychlost oběhu planety. Vyjádříme hmotnost hvězdy

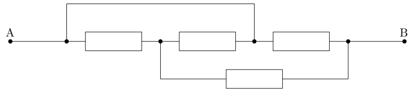
$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}\,.$$

I když jsme vztah odvodili „pouze“ pro kruhové dráhy, z 3. Keplerova zákona víme, že tento vztah platí i pro eliptické orbity. Vidíme, že hmotnost hvězdy je přímo úměrná třetí mocnině poloměru a mínus druhé mocnině periody oběhu. Pro obě veličiny trojnásobné je tedy poměr hmotností hvězd roven 1:3.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

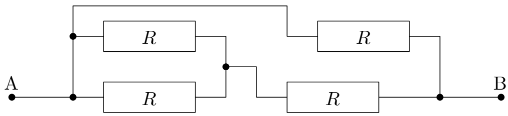
Úloha CD ... složitá síť

Jaký bude celkový odpor mezi body A a B v zapojení uvedeném na obrázku, pokud je odpor každého z rezistorů na něm zakreslených stejný a označíme-li ho R?



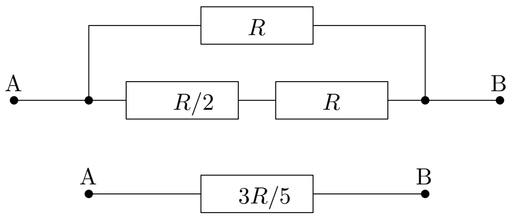
Karel si sám zkoušel, jak je dobrý v řešení fyzikálních úloh.

Na první pohled se může zdát, že obvod obsahuje nějakou smyčku, ve které bychom museli využít Kirchhoffovy zákony. Popřípadě, že budeme muset využít převod trojúhelníka na hvězdu či naopak, ale není tomu tak. Jestliže si obvod správně překreslíme, zjistíme, že jde pouze o relativně jednoduché zapojení paralelně a sériově zapojených rezistorů, které snadno spočítáme. Původní obvod si můžeme, jak snad snadno nahlédnete, upravit na ten, který je na obrázku 1, a následně pokračujeme v úpravách a spojujeme rezistory dle klasických pravidel.



Obr. 1: Upravený obvod

Tedy odpory do série jednoduše sčítáme. Paralelně zapojené rezistory sčítáme v převrácených hodnotách. Jak vidíte z obrázku 2, výsledek je $3R/5 = 0{,}6\,R$.



Obr. 2: Upravený obvod

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha CE ... small data

Matěj se rozhodl otestovat hrací kostku. Začal si s ní házet a zapisoval si jednotlivé výsledky. Po devíti hodech začal naměřená data zpracovávat. Zjistil, že minimální hodnota, která padla, je 1 a maximální je 6. Medián je 4, jediný modus je 2 a aritmetický průměr je zaokrouhleně 3,4. Jaký mu vyšel geometrický průměr? *Matěj rád hraje hazardní hry.*

Po bližší inspekci zadání zjistíme, že všech 9 hodnot, které Matěj naměřil, je jednoznačně určeno zadanými informacemi.

Víme, že se v hodnotách alespoň jednou vyskytuje 1, 4 a 6. Dále tam budou alespoň tři dvojky (protože je to **jediný** modus). Protože 4 je medián, nemohla padnout nižší nebo vyšší hodnota více než čtyřikrát. Dvojky budou tedy právě tři. Zbývají nám tři čísla, jejich hodnota může být 4 až 6. Z aritmetického průměru zjistíme, že součet všech čísel je 31 (30, resp. 32, by se zaokrouhlilo na 3,3, resp. 3,6). Zbývající čísla mohou být buď 4, 4, 6, nebo 4, 5, 5. Z podmínky jediného modu ale nemůžeme mít tři čtyřky. Naměřené hodnoty tedy jsou:

$$1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 6\,.$$

Nyní zbývá jen určit geometrický průměr $\sqrt[9]{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6} = 2{,}99$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha CF ... srdce jako pracant

Jakou práci vykoná za život lidské srdce? Tlaková amplituda (rozdíl mezi systolickým a diastolickým tlakem) je zhruba $\Delta p = 40\,\mathrm{mmHg}$ (mm rtuťového sloupce). Předpokládejme, že se osoba dožije $T = 82\,\mathrm{let}$. Protože v klidu proteče srdcem $5\,\mathrm{l}$ krve za minutu, kdežto při námaze průtok může vzrůst až na $20\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$, uvažujme, že střední průtok bude zhruba $Q = 6\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$.

Karel se inspiroval v Brilliant, kde to měli asi trochu špatně.

Nejprve si převeďme tlakovou amplitudu na základní jednotky $\Delta p = 5{,}33 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$. Provádíme zatím mezivýpočty, takže si sledujeme vyšší počet platných cifer, než by bylo vhodné uvést do výsledku. To děláme, abychom příliš nezvětšovali zaokrouhlovací chybu. Zaokrouhlení provedeme na konci. Dobu života si převedeme na sekundy $T = 2{,}59 \cdot 10^9\,\mathrm{s}$. Průtok budeme také chtít v základních jednotkách, tedy metrech krychlových za sekundu. Dostáváme $Q = 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$.

Nyní se věnujme fyzikálním aspektu problému. Práce $W = Fs$ je síla F působící po nějaké dráze s. Přitom uvažujeme, že síla působí ve směru pohybu. Síla na plochu S je tlak. Pokud tedy budeme uvažovat danou plochu jako průřez srdcem či hlavní aortou, pak platí $F = S\Delta p$. Pro průtok pak platí, že jde o nějaký objem V, který proteče za jednotku času, tedy platí $Qt = V$. Pro objem pak platí $V = Ss$. Dohromady máme $W = Fs = sS\Delta p = Qt\Delta p$. Dostáváme tedy konečně vyjádření ze zadaných veličin. Shodou okolností stačí všechny veličiny vynásobit, takže nejsložitější procedurou se ukázalo převádění veličin na správné jednotky. Dostáváme výsledek $W \approx 1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$. Srdce tedy za život vykoná práci v řádech gigajoulů.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CG ... je mi tak akorát

Na jaké hodnotě by se ustálila teplota Zeměkoule, pokud bychom ji považovali za absolutně černé těleso, které přijímá energii pouze ze Slunce a neobsahuje žádný vlastní zdroj tepla? Výkon Slunce je $3{,}827 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$. Vzdálenost Země od Slunce je $1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Zemi považujte za kouli mající na celém povrchu stejnou teplotu. Teplotu uveďte ve stupních Celsia.

Štěpán má rád klasiku.

Země s poloměrem r ve vzdálenosti R je vždy osvětlována z jedné strany. Slunce svítí pouze na plošku o velikosti πr^2. Protože jistě platí $r \ll R$, můžeme psát pro výkon ze Slunce $P_S = P\frac{r^2}{4R^2}$.

Zářivý výkon Země je $P_Z = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta.

Tyto dva výkony musejí být stejné, pokud hledáme teplotu ustálení. Odtud lze vyjádřit termodynamickou teplotu T. Poloměr Země r není třeba znát.

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{16\pi R^2 \sigma}} = 277{,}9\,\mathrm{K} = 4{,}8\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Teplota Země by se ustálila na $4{,}8\,^\circ\mathrm{C}$.

Štěpán Stenchlák
stenchlak@fykos.cz

Úloha CH ... maják

Máme izotropní zdroj světla o svítivosti $I_1 = 100\,\mathrm{cd}$, který je umístěn v ohnisku parabolického zrcadla. Kraj zrcadla (řez paraboloidem, kolmý na jeho osu symetrie), jehož poloměr je $R = 1\,\mathrm{m}$, je kruhový a má ve středu ohnisko. Ve vzdálenosti $L = 1\,\mathrm{km}$ podél osy paraboloidu se nachází kruhový terč o poloměru R. Kolikrát se z pohledu kruhového terče zvětší efektivní svítivost majáku po přidání zrcadla? *Kuba chtěl odhadnout důležitost zrcadla u majáku.*

Jelikož platí $R \ll L$, je možné ve vzdálenosti L reprezentovat maják jako bodový zdroj o určité svítivosti I_2. Je však zřejmé, že maják bude anisotropní zdroj – ve směru podél osy bude mít vysokou svítivost, jinde nízkou.

Paprsky směřující na zrcadlo se odrazí rovnoběžně s osou paraboly, a tedy všechny budou mířit přímo na terč. Jejich dráha bude bezpečně menší než $L + 2R$, což je přibližně rovno L, proto můžeme uvažovat že paprsky vychází přímo z ohniskové roviny.

Je zřejmé, že poměr svítivostí I_1 a I_2 bude rovný poměru prostorových úhlů, do kterých zdroj vyzařuje tak, že tyto paprsky skončí na terči. (Můžeme uvážit, že světelný tok se spočítá jako $\Phi = I\Omega$).

Prostorový úhel, pod kterým je terč vidět z majáku, lze díky jeho vzdálenosti aproximovat jako

$$\Omega_1 = \frac{\pi R^2}{L^2} = \frac{\pi R^2}{L^2}\,.$$

Prostorový úhel zrcadla je jednoduše polovina plného úhlu, tedy $\Omega_2 = 2\pi$.

Nyní můžeme psát pro efektivní svítivost

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1} \approx \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{2L^2}{R^2} \doteq 2{,}00 \cdot 10^6\,.$$

Výsledek tedy je přibližně $2{,}00 \cdot 10^6$.

Jakub Dolejší
dolejsi@fykos.cz

Úloha DA ... Bernoulli v praxi

Z kohoutku s hrdlem o poloměru $R = 0{,}005\,\mathrm{m}$ necháme téct vodu průtokem $Q_0 = 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-1}}$. V jaké vzdálenosti pod kohoutkem se pěkně spojitý proud začne rozpadat na jednotlivé kapky? Uvažujte ideální kapalinu a také, že kapky se začnou tvořit, pokud by proud měl mít menší poloměr než $r = 0{,}003\,\mathrm{m}$. *Matěj se topí při přednášce.*

Vlivem tíhového zrychlení se bude rychlost vody směrem dolů zvyšovat. Podle rovnice kontinuity se nám ale musí zachovávat průtok. Vyjádříme počáteční rychlost, kterou voda z kohoutku vytéká.

$$v_0 = \frac{Q_0}{\pi R^2}\,.$$

Rychlost v závislosti na hloubce h pod kohoutkem podle rovnosti kinetické a potenciální energie je

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = hg\,,$$

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}\,.$$

Stejný výsledek bychom dostali použitím Bernoulliho rovnice s tím, že ve všech místech je stejný (atmosférický) tlak.

Použitím rovnice kontinuity dostáváme hloubku, ve které se poloměr čůrku sníží na kritickou tloušťku.

$$\pi r^2 v = Q_0\,,$$

$$\pi r^2 \sqrt{2gh + \frac{Q_0^2}{\pi^2 R^4}} = Q_0\,,$$

$$h = \frac{Q_0^2}{2\pi^2 g r^4} - \frac{Q_0^2}{2\pi^2 g R^4} = \frac{Q_0^2}{2\pi^2 g}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}\right) \doteq 0{,}0222\,\mathrm{m}\,.$$

Proud se rozpadne na kapky přibližně 2 cm pod kohoutkem.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha DB ... thunderstorm

Běžíte si takhle večer po kolejích rychlostí $v = 15\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a najednou zahlédnete na obzoru temný obrys vlaku, jenž ve řítí přímo proti Vám rychlostí $u = 160\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Strojvedoucí Vás již zpozoroval a klakson vlaku se rozhoukává s frekvencí $f = 1\,000\,\mathrm{Hz}$. Jakou frekvenci f' ale uslyšíte Vy, pokud navíc běžíte proti větru o rychlosti $w = 100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$? Rychlost zvuku uvažujte $c = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. *Tomáš nechtěl skočit pod vlak.*

V důsledku vzájemného pohybu zdroje a pozorovatele vlnění dochází ke zhušťování jednotlivých vln, a tím i ke změně frekvence. Tento efekt je známý jako Dopplerův jev a pro frekvenci vlnění, které zachytí pozorovatel, platí

$$f' = f\,\frac{c + v_\mathrm{p}}{c - v_\mathrm{z}}\,,$$

kde f je původní vysílací frekvence zdroje, v_z je rychlost zdroje, v_p je rychlost pozorovatele vůči prostředí (vzduchu) a c je rychlost šíření vlnění v daném prostředí. Pokud se pozorovatel, resp. zdroj, pohybují směrem k sobě (jako je tomu v této úloze), jejich rychlosti dosazujeme kladné. V tomto případě však ještě musíme započítat vítr, který fouká od zdroje k pozorovateli rychlostí w, a tím zvyšuje rychlost šíření vlnění v tomto směru na $c' = c + w$. Pro výslednou frekvenci, kterou uslyšíme, platí

$$f' = f\frac{c' + v_{\mathrm{p}}}{c' - v_{\mathrm{z}}} = f\frac{c + w + v}{c + w - u}\,,$$

kde po dosazení veličin ze zadání dostáváme výsledek $f' \doteq 1\,150\,\mathrm{Hz}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha DC ... problém fotbalistů

Fotbalista stojí $d = 15{,}0\,\mathrm{m}$ před fotbalovou brankou, která je $h = 2{,}50\,\mathrm{m}$ vysoká, a vykopává míč ve směru přímo na bránu pod úhlem $\alpha = 30.0^\circ$ vůči vodorovné rovině. Jakou rychlostí má vykopnout míč, aby bez odrazu dopadl do brány? Odpovědí je interval. Odpor vzduchu ani velikost míče neuvažujte. *Danka neumí trefit bránu.*

Na pohyb lopty sa môžeme pozerať ako na šikmý vrh. Ak počiatok sústavy súradníc zvolíme v mieste výkopu lopty, pre vodorovnú a zvislú súradnicu lopty platí v čase t od vykopnutia

$$x = vt\cos\alpha\,,\quad y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Aby lopta dopadla do brány, musí v okamihu, keď jej x-ová zložka bude rovná d, jej y-ová zložka ležať v intervale $0 \le y \le h$. Vylúčením času z rovníc pre šikmý vrh dostaneme podmienku

$$0 \le d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v^2\cos\alpha^2} \le h\,.$$

Odtiaľ dostávame podmienku pre rýchlosť

$$13{,}04\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \le v \le 15{,}46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Teda futbalista musí vykopnúť loptu rýchlosťou väčšou ako $13{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a menšou ako $15{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha DD ... čočka a zrcadlo

V místnosti vysoké $h = 3\,\mathrm{m}$ položíme na zem pod světlo zrcadlo. Do výšky $5\,\mathrm{cm}$ nad zrcadlo umístíme vodorovně tenkou spojnou čočku o ohniskové vzdálenosti $f = 30\,\mathrm{cm}$. Jak vysoko nad zemí bude obraz lustru? Lustr je přímo na stropě. *Matěj si hrál s optickými prvky.*

Vzdálenost čočky a zrcadla označme $d = 5\,\mathrm{cm}$. Čočka nejdříve zobrazí lustr do výšky h' nad zemí (h' může být i záporné – obraz "pod zemí"). Tento obraz je následně odražen zrcadlem do výšky $-h'$. Nakonec je znovu zobrazen čočkou do výšky h''.

Pro první zobrazení máme zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{h-d}+\frac{1}{d-h'}=\frac{1}{f}\,,$$

$$h'=d-\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{h-d}}\doteq -28{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Obraz se odrazí od zrcadla a pro druhé zobrazení máme druhou zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{d-(-h')}+\frac{1}{h''-d}=\frac{1}{f}\,,$$

$$h''=d+\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{d+h'}}\doteq 18{,}14\,\mathrm{cm}\,.$$

Skutečný obraz bude tedy 18 cm nad zemí.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha DE ... mytí hrnků

U dřezu máme nainstalovaný kohoutek s otočnou hlavicí, která je momentálně natočena pod úhlem $\alpha = 30^\circ$ ke svislici. Hlavice je ve výšce $h = 30\,\mathrm{cm}$ nad dřezem. Kohoutek je nastaven do polohy, kdy z něj vytéká pouze jeden proud. Průměr výtokového otvoru je $d_1 = 5\,\mathrm{mm}$, objemový průtok je $Q = 100\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$. Proud z kohoutku při tomto nastavení dopadá do vodorovné vzdálenosti l_1 od svislice. Poté kohoutek přenastavíme na mód „sprcha“ s deseti výtokovými otvory o průměru $d_2 = 1\,\mathrm{mm}$, proud nyní dopadá do vzdálenosti l_2 od svislice. Nalezněte poměr l_2/l_1. Uvažujte přitom, že vzájemná vzdálenost výtokových otvorů je zanedbatelně malá.

5M (Mirek myl mimořádně mastný mlýnek.)

Bez významné ztráty přesnosti můžeme předpokládat, že voda je nestlačitelná, a tedy že se objemový tok při změně obsahu otvorů zachová. Výtoková rychlost v běžném módu je

$$v_1=\frac{4Q}{\pi d_1^2}\,,$$

po přepnutí na více proudů je výtoková rychlost

$$v_2=\frac{4Q}{10\pi d_2^2}\,.$$

Ze znalosti počáteční rychlosti a výšky lze dopočíst vzdálenost, do které proud dopadá. Jedná se o šikmý vrh dolů daný rovnicemi

$$x=vt\cos\beta\,,\quad y=vt\sin\beta-\frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde jsme definovali $\beta=\alpha-\pi/2$. Nyní položíme $y=-h$ a hledáme x. V závislosti na počáteční rychlosti vyjádříme tuto vzdálenost jako

$$x(v)=v^2\frac{\cos\beta}{g}\left(\sqrt{\frac{2gh}{v^2}+\sin^2\beta}+\sin\beta\right).$$

Vypočteme $l_1 = x(v_1) \doteq 16{,}178\,\mathrm{cm}$, $l_2 = x(v_2) \doteq 17{,}116\,\mathrm{cm}$ a získáme poměr

$$\frac{l_2}{l_1} = 1{,}058\,.$$

Vzdálenost naroste zanedbatelně, zhruba jen o 6 %. Limitní vzdálenost při klesajícím obsahu otvorů je $10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha DF ... problém čtyř těles

Čtyři planety hmotnosti Měsíce ($7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$) obíhají kolem svého společného těžiště po stabilních kruhových orbitách tak, že tvoří vrcholy čtverce o straně délky Země–Měsíc, tedy 384 400 km. Jaká je perioda jednoho oběhu? *Pro Štěpána byly tři planety málo.*

Aby se planety udržely na orbitě, musí platit rovnost odstředivé síly F_o se sílou gravitační F_G.

Vzdálenost planet od středu je $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, kde a je délka strany čtverce. Celková odstředivá síla při úhlové rychlosti $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde T je perioda, je $F_\mathrm{o} = m\omega^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Gravitační síla musí být vypočtena postupně. Ke dvěma sousedním planetám je vzdálenost a, velikost síly tedy bude $G\frac{m^2}{a^2}$, kde G je gravitační konstanta. Tyto síly jsou dvě a jsou navzájem kolmé, jejich součet tedy bude $F_{G_1} = \sqrt{2}G\frac{m^2}{a^2}$ a bude mířit do středu. Planeta naproti, ve vzdálenosti $a\sqrt{2}$, bude působit silou $F_{G_2} = G\frac{m^2}{2a^2}$, která míří také do středu. Jejich součet je $F_G = F_{G_1} + F_{G_2} = G\frac{m^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$.

Z rovnosti $F_\mathrm{o} = F_G$ vyjádříme čas T a rovnici upravíme

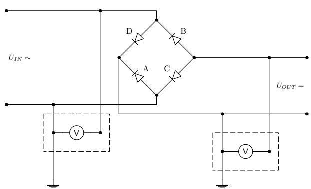
$$T = \sqrt{\frac{8\pi^2 a^3}{Gm\left(4+\sqrt{2}\right)}} \doteq 1{,}30 \cdot 10^7\,\mathrm{s} \doteq 150{,}4\,\mathrm{dne}\,.$$

Perioda jednoho oběhu je v naší soustavě 150,4 dne.

Štěpán Stenchlák
`stenchlak@fykos.cz`

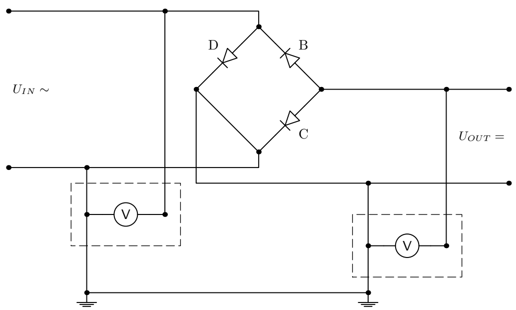
Úloha DG ... Proč se z toho čoudí?

Lukáš si sestavil dvoucestný usměrňovač a rozhodl se, že jej otestuje, viz obrázek. Vzal dva osciloskopy (protože ví, že záporné póly jednoho osciloskopu jsou navzájem propojené...), jeden z nich připojil na vstupní střídavé napětí a druhý na výstupní stejnosměrné napětí. Bohužel oba osciloskopy měly záporný pól spojený se zemnícím kolíkem v zásuvce. Ze které diody se začalo kouřit?



Lukáš spálil germaniovou diodu v praktiku a byl udivený proč, když použil dva osciloskopy.

Ak si spojíme obe zemnenia osciloskopov vidíme, že oba póly diódy A budú trvale na rovnakom potenciáli, teda môžeme diódu nahradiť vodičom. Dióda D je zapojená priamo medzi svorkami vstupného napätia a pri jednej z polvĺn vstupného napätia je zapojená do skratu, a preto ňou bude pretekať neúmerne veľký prúd, ktorý ju spáli. Ako z prvej sa teda začne „čoudit“ z diódy D.



Obr. 3: Zapojenie diód.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Úloha DH ... sluneční sniper

Matěj se v poledne za rovnodennosti nachází na rovníku a je mu příšerné horko. Naštve ho neúprosně svítící Slunce, vytáhne svoji podomácku vyrobenou zbraň, která dokáže střílet lehké náboje až skoro rychlostí světla, a vystřelí projektil přímo směrem do středu Slunce. Zapomněl ale na pohyby vesmírných těles. Jaká musí být minimální rychlost náboje, aby Matěj Slunce zasáhl a mohl si tak připsat další zářez? *Matějovi bylo horko.*

Matěj by zasáhl přesně do středu, pouze pokud by se oproti Slunci nepohyboval. On totiž neuvažoval, že Země obíhá okolo Slunce a zároveň se otáčí.

Rychlost v_Z otáčení Země na rovníku vypočítáme jednoduše, známe-li poloměr Země $R_Z = 6380\,\mathrm{km}$ a periodu rotace $T_Z = 24\,\mathrm{h}$. Při dosazování musíme dát pozor na jednotky

$$v_Z = \frac{2\pi R_Z}{T_Z} = 464\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Rychlost obíhání kolem slunce v_S vypočítáme obdobně. Stačí zjistit vzdálenost Země–Slunce $R_S = 1\,\mathrm{AU} = 150\cdot 10^9\,\mathrm{m}$, periodu oběhu kolem Slunce dobře známe $T_S = 365{,}25\,\mathrm{dní} = 3{,}16\cdot 10^7\,\mathrm{s}$

$$v_S = \frac{2\pi R_S}{T_S} = 29\,900\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Vidíme tedy, že rychlost v_Z je zanedbatelná, což nám velmi ulehčí práci, protože nemusíme přemýšlet nad tím, jakým směrem se Země otáčí a jak je sklopena osa rotace vůči rovině oběhu kolem Slunce.

Označme v rychlost projektilu. Bude trvat přibližně $t = \frac{R_S}{v}$, než projektil doletí ke Slunci. Za tuto dobu nesmí urazit větší „postranní“ vzdálenost, než je poloměr Slunce $r = 6{,}96 \cdot 10^8$ m. Jinak bude vychýlen natolik, že Slunce mine.

$$v_S t \leq r \,,$$
$$\frac{2\pi R_Z}{T_Z} \frac{R_S}{v} \leq r \,,$$
$$v \geq \frac{2\pi R_Z R_S}{T_Z r} = \frac{R_S}{r} v_S = 6{,}4 \cdot 10^6 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,.$$

Minimální možná rychlost je tedy přibližně padesátina rychlosti světla.

Kdybychom chtěli přesnější výsledek, museli bychom rychlosti oběhu a otáčení od sebe odečíst, protože se Země otáčí stejným směrem kolem své osy i kolem Slunce.

Dále bychom mohli započítat sklon osy zemské rotace (ten je přibližně $\varphi = 23.4^\circ$ vůči ose oběhu kolem Slunce) a rychlosti pak sčítat vektorově.

$$v' = \sqrt{(v_S - v_Z \cos\varphi)^2 + (v_Z \sin\varphi)^2} \,.$$

Po dosazení vyjde

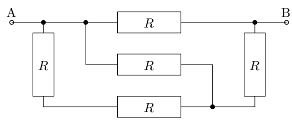
$$v' = 29\,440 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,,$$
$$v \geq \frac{R_S}{r} v' = 6{,}34 \cdot 10^6 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \,,$$

což ale stále není úplně přesný výsledek, protože Země obíhá po eliptické trajektorii a my nevíme, zda se v úloze jedná o jarní nebo podzimní rovnodennost, tedy nemůžeme určit přesnou vzdálenost Země-Slunce.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha EA ... zase ty odpory

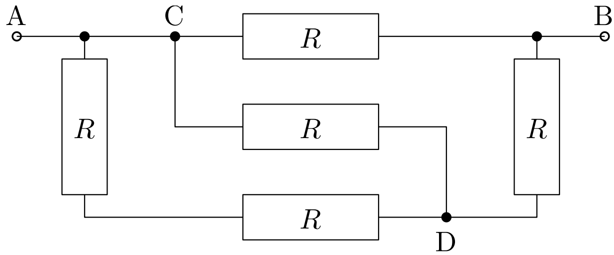
Jaký bude celkový elektrický odpor mezi body A a B obvodu znázorněného na obrázku? Každý rezistor má elektrický odpor R. *Karel si hrál s IPE.*



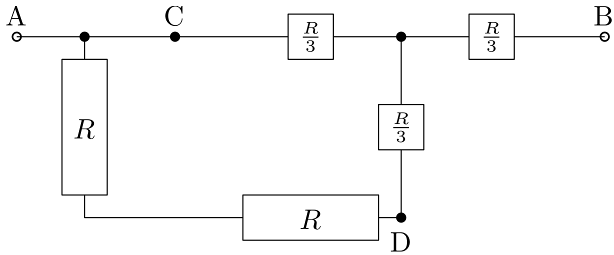
Označíme si uzly vyskytující se v obvodu jako C a D viz obrázek 4.

Vidíme, že uspořádání je trochu nevhodné pro přímé vyřešení pomocí sčítání rezistorů v sériovém a paralelním zapojení. Mohli bychom využít Kirchhoffovy zákony, ale v tom bychom se zcela určitě rychle ztratili, i když je obvod relativně jednoduchý. Vhodná a poměrně jednoduchá úprava je přeměna z trojúhelníka na hvězdu.[2] Upravíme takto trojúhelník BCD. Místo rezistorů o odporu R v trojúhelníku budou ve hvězdě rezistory $R/3$. Upravené zapojení vidíte na obrázku č. 5.

[2] Odvození a použití transformace trojúhelník-hvězda naleznete například v knihovničce Fyzikální olympiády v brožurce Elektrické obvody (stejnosměrný proud) viz str. 11 http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf.



Obr. 4: Nákres obvodu s označenými uzly



Obr. 5: Upravené zapojení

Pak již můžeme snadno spojovat rezistory a dobrat se k výsledku

$$R_{\mathrm{celk}} = \frac{\frac{R}{3}\frac{7R}{3}}{\frac{R}{3}+\frac{7R}{3}} + \frac{R}{3} = \frac{5}{8}R = 0{,}625\,R\,.$$

Celkový odpor obvodu bude $0{,}625\,R$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha EB ... typický problém dojíždějícího

Matěj jde na autobusovou zastávku podél rovné silnice rychlostí $v = 4\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Vidí, že proti němu přijíždí na zastávku autobus rychlostí $u = 36\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, ale neví, zda je to bus číslo 201, který potřebuje. V okamžiku, kdy přečte č. 201, začne okamžitě utíkat rychlostí $3v$. Stihne nastoupit? Rozlišovací schopnost oka je 1 úhlová minuta a displej autobusu je čitelný, pokud dokáže rozlišit dva pixely vzdálené $2\,\mathrm{cm}$. Autobus zpomaluje celou dobu konstantně a $10\,\mathrm{s}$ stojí na zastávce s otevřenými dveřmi. Jako výsledek uveďte časovou rezervu (v případě, že to nestihne, bude čas záporný). Na začátku je Matěj ve stejné vzdálenosti $50\,\mathrm{m}$ od zastávky jako autobus. *Matěj to stihl jen o fous.*

Nejprve vypočítáme, z jaké vzdálenosti dokáže Matěj přečíst nápis. Tuto vzdálenost označme x. Jelikož 1 úhlová minuta je velmi malý úhel (označme α), znamená to, že mezní rozlišení ($y =$

$= 2\,\mathrm{cm}$) je velmi malé v porovnání se vzdáleností, ze které displej autobusu pozorujeme. Můžeme tedy psát

$$\alpha \approx \frac{y}{x}\,.$$

Odtud máme

$$x \approx \frac{y}{\alpha} \doteq 68{,}75\,\mathrm{m}\,.$$

Nyní spočítáme čas, ve který Matěj přečte nápis. K tomu bude potřeba vyjádřit konstantní zrychlení autobusu. Počáteční vzdálenost od zastávky označme $s = 50\,\mathrm{m}$. Ze základních vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb dostáváme

$$s = \frac{at_1^2}{2} = \frac{ut_1}{2}\,, \quad t_1 = \frac{2s}{u} = 10\,\mathrm{s}\,, \quad a = \frac{u^2}{2s} = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Mimo jiné nám mezivýpočtem vyšlo, že autobus zastaví za $10\,\mathrm{s}$. Počáteční vzdálenost Matěje od autobusu je $2s$. My hledáme čas, za který se tato vzdálenost zmenší na x, tedy o $2s - x$. Použitím stejných vzorců dostaneme

$$vt_\mathrm{x} + ut_\mathrm{x} - \frac{1}{2}at_\mathrm{x}^2 = 2s - x\,, \quad \frac{1}{2}at_\mathrm{x}^2 - (u+v)\,t_\mathrm{x} + (2s - x) = 0\,,$$

$$t_\mathrm{x} = \frac{u + v - \sqrt{(u+v)^2 - 2a\,(2s - x)}}{a} \doteq 3{,}305\,\mathrm{s}\,.$$

Za tuto dobu Matěj ušel $s_1 = vt_\mathrm{x} \doteq 3{,}67\,\mathrm{m}$.[3] Zbylých $s_2 = s - s_1 \doteq 46{,}33\,\mathrm{m}$ uběhne za $t_2 = \frac{s_2}{3v} \doteq 13{,}90\,\mathrm{s}$. Přičteme-li k tomu čas chůze, máme $t_2 + t_\mathrm{x} \doteq 17{,}20\,\mathrm{s}$. Víme-li z předchozího výpočtu, že autobusu trvalo $10\,\mathrm{s}$ než zastavil, a pak $t_0 = 10\,\mathrm{s}$ na zastávce čekal, zbývá Matějovi příjemná rezerva celých $2{,}8\,\mathrm{s}$ a nastoupit tedy naštěstí bez problémů stihne.

Toto je typ úlohy, ve které je potřeba udělat mnoho na sobě nezávislých výpočtů, a proto se z časového hlediska vyplatí rovnou od začátku řešit pouze pro konkrétní hodnoty a nehledat obecné vzorce, které by na konci mohly být poměrně dlouhé. Na druhou stranu si ale musíme všechny mezivýpočty zapisovat s dostatečnou přesností (alespoň na 3 až 4 platné cifry), abychom zabránili propagování nepřesností. Obecné řešení by vypadalo takto

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 - t_2 - t_\mathrm{x} = t_0 + \frac{2s}{u} - \frac{s - vt_\mathrm{x}}{3v} - t_\mathrm{x} = \\ &= t_0 + \frac{2s}{u} - \frac{s}{3v} - \left(1 - \frac{v}{3v}\right)\frac{u + v - \sqrt{(u+v)^2 - 2a(2s - x)}}{a} = \\ &= t_0 + \frac{2s}{u} - \frac{s}{3v} - \frac{4s}{3}\,\frac{u + v - \sqrt{(u+v)^2 - \frac{u^2}{s}(2s - \frac{y}{\alpha})}}{u^2}\,, \end{aligned}$$

což rozhodně není nádherný výraz.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

[3] Při řešení kvadratické rovnice jsme zvolili záporné znaménko před odmocninou, protože nás zajímá nejnižší čas, za který se dostanou do takovéto vzdálenosti. Řešení s plusem by bylo pro případ, kdy autobus pokračuje ve zpomalování, úplně zastaví a rozjede se zpět opačným směrem.

Úloha EC ... plochotoč

Matěj o hmotnosti m objevil na dětském hřišti novou atrakci. Je to velký plochý kolotoč ve tvaru homogenního disku o poloměru R a hmotnosti $2m$, který se může otáčet kolem své svislé osy bez tření. Matěj si stoupne na jeho okraj a roztočí se s kolotočem rychlostí v (vůči zemi; Matěj se vůči kolotoči nehýbe). Jakou práci vykoná, když se nyní přesune do středu kolotoče? Matěje můžete aproximovat hmotným bodem. *Matěj se rád točí.*

Matěj koná práci, když jde směrem doprostřed, protože proti němu působí odstředivá síla. Celý kolotoč se tak urychluje. Práci spočítáme z rozdílu energií před a po Matějově přesunu a vycházet budeme ze zákona zachování momentu hybnosti. Počáteční pohybová energie je

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\,,$$

kde $\omega = \frac{v}{R}$ je počáteční úhlová rychlost kolotoče a $J = \frac{1}{2}\left(2m\right)R^2$ je moment setrvačnosti disku. Počáteční moment hybnosti je součtem momentu hybnosti disku a Matěje

$$L = J\omega + mRv\,.$$

Když se Matěj dostane doprostřed, bude mít nulový moment hybnosti (jeho vzdálenost od osy otáčení je nulová). Celkový moment hybnosti se ale musí zachovat, kolotoč se proto bude otáčet úhlovou rychlostí $\omega' > \omega$

$$L = J\omega'\,.$$

Z rovnosti momentů vyjádříme ω'

$$\omega' = \omega + \frac{mRv}{J}$$

a spočítáme konečnou pohybovou energii

$$E_1 = \frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \omega mRv + \frac{1}{2}\frac{m^2R^2v^2}{J}\,.$$

Rozdíl energií před přesunem a po něm je roven vykonané práci

$$W = E_1 - E_0 = mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2R^2v^2}{J} - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2}{2m}\,.$$

Vykonaná práce je tedy $W = mv^2$.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha ED ... konečně příjemná teplota

Kolem hvězdy o hmotnosti $M_H = 5{,}0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ *a poloměru* $R_H = 1{,}0\cdot 10^{7}\,\mathrm{km}$ *obíhá po kruhové dráze planeta rychlostí* $v = 1{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. *Teplota planety je* $T = 100\,\mathrm{K}$. *Jestliže považujeme hvězdu i planetu za dokonale černá tělesa, jaká je teplota hvězdy v kelvinech?*

Dance bylo zima.

Teplota planéty je stála, preto množstvo energie pohltenej planétou v tomto rovnovážnom stave je rovné množstvu energie vyžiarenej planétou. Intenzita vyžarovania čierneho telesa je daná Stefan-Boltzmannovým zákonom

$$I = \sigma T^4\,.$$

Podmienka pre energiu má tvar

$$\sigma T_H^4 4\pi R_H^2 \frac{\pi R_p^2}{4\pi r^2} = \sigma T_p^4 4\pi R_p^2\,.$$

Vzdialenosť planéty od hviezdy r vypočítame z podmienky rovnováhy gravitačnej a odstredivej sily

$$r = \frac{GM_H}{v^2}\,.$$

Potom pre teplotu hviezdy platí

$$T_H = T_p\sqrt{\frac{2r}{R_H}} = T_p\sqrt{\frac{2GM_H}{R_H v^2}} \doteq 25\,800\,\mathrm{K}\,.$$

Teplota hviezdy je teda 25 800 K.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha EE ... odpudivá

Mějme 1 000 hmotných bodů v rovině v jinak prázdném prostoru. Souřadnice k-tého bodu jsou $x_k = (k/1\,000)^5\,\mathrm{km}$, $y_k = (k/1\,000)^3\,\mathrm{m}$, kde $k = 0, \dots, 999$. Hmotnost každého bodu je $M = 300\,\mathrm{kg}$. Jakým kladným elektrickým nábojem Q musíme nabít každou z částic, aby byl systém v rovnováze? Všechny částice jsou na začátku v klidu.

Lukáš sledoval (samo)krocení nahých singularit.

Obtížně vypadající úloha má jednoduché řešení. Mezi každou dvojicí částic k a l bude působit součet gravitační a elektrostatické síly

$$F_{kl} = -\frac{GM^2}{r_{kl}^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r_{kl}^2}\,.$$

Rovnováha znamená, že na částice nepůsobí žádné síly, tedy $F_{kl} = 0$ pro všechna k, l. Protože obě síly klesají se vzdáleností stejně rychle, splníme hledanou podmínku rovností koeficientů sil

$$GM^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\,,$$
$$Q = M\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G} \doteq 2{,}6\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}\,.$$

Každý z hmotných bodů tedy musíme nabít elektrickým nábojem $Q \doteq 2{,}6\cdot 10^{-8}$ C.

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Úloha EF ... zavěs to kyvadlo!

Mějme tuhou, tenkou, homogenní tyč. V určitém místě do ní navrtáme díru tak, aby po zavěšení na hřebík měla tyč jakožto kyvadlo co nejmenší periodu malých kmitů. Díra rozděluje tyč na dvě části, jaký je poměr délek těchto částí? *Matěj chtěl pověsit Jáchyma.*

Použijeme vzoreček pro fyzikální kyvadlo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J + ml^2}{mgl}}\,,$$

kde m je hmotnost kyvadla, l je vzdálenost těžiště od bodu závěsu a J je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm. Pro tyč platí $J = \frac{1}{12}mL^2$, kde L je délka tyče. Moment setrvačnosti i hmotnost je v tomto případě konstantní. Hledáme tedy takové l, pro které bude výraz pod odmocninou

$$\frac{J + ml^2}{ml} = \frac{\frac{1}{12}L^2 + l^2}{l}$$

co nejmenší. K tomu spočítáme první derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{L^2}{12l} + l\right) = -\frac{L^2}{12l^2} + 1\,.$$

Položením rovno nule dostáváme

$$l = \frac{L}{\sqrt{12}}\,.$$

Hledaný poměr je

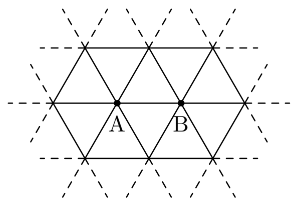
$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{12}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} \doteq 3{,}732\,.$$

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha EG ... trojúhelníková síť

Máme nekonečnou síť z odporového drátu znázorněnou na obrázku. Jaký odpor bude mezi sousedními body A a B, pokud odporový drát o délce |AB| má odpor R_1?

Karel by chtěl mít doma nekonečnou odporovou síť.



Úlohu je vhodné řešit trikově, jako ostatně prakticky každou úlohu obsahující nějakou symetrii a nekonečný počet rezistorů. Využijeme princip superpozice.[4]

Princip superpozice nám říká, že pokud si naše řešení rozložíme na libovolný počet podúloh, které následně dáme všechny dohromady, dostaneme řešení původního problému.

V našem problému neumíme přímo vyřešit to, že teče proud I z bodu A do bodu B.[5] Snadno ale dokážeme řešit problém, že proud teče z bodu A do nekonečna. Proč? Protože máme v obvodu symetrii. Z každého bodu vychází přesně 6 odporových drátů, tedy rezistorů. Všechny jsou stejně dlouhé, všechny tedy mají stejný odpor. Pokud síť otočíme o 60°, pak nutně

[4] Něco málo o tomto principu naleznete například v knihovničce Fyzikální olympiády v brožurce Elektrické obvody (stejnosměrný proud), viz str. 27 `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf`.

[5] Odteď předpokládejme, že teče proud v tomto směru, tedy z bodu A do bodu B – je to bez újmy na obecnosti. Stejné řešení by vám vyšlo i při opačném zapojení nebo střídavém proudu. Tento předpoklad činíme pouze pro jednodušší představu.

musíme mít stejnou situaci, jako jsme měli původně. Ještě zdůrazněme to, že proud tekoucí „do nekonečna“ znamená, že druhý konec obvodu je nekonečně vzdálený, a to ve všech směrech, a dokonce ve všech směrech stejně. V tom případě se tedy původní proud I, který vchází do bodu A odněkud z třetího rozměru, musí rozdělit přesně na stejné díly do každého odporového drátu. Tedy v tom případě poteče každým drátem, který vychází z A, přesně proud $I/6$. Dále se bude proud nějak dále dělit, ale to nás už nezajímá. My se zajímáme hlavně o drátek A-B, ve kterém tedy bude $I/6$ z toho, jaký proud vtéká z bodu A.

Nyní nám odtekl proud „do nekonečna“, měli bychom ho tedy ještě vzít a pustit ho z nekonečna zpět do bodu B. Jinými slovy, připravit druhou část našeho řešení. Stejnou úvahou jako prve, kdy z bodu A vytékal proud I, dospějeme k závěru, že pokud do bodu B poteče proud I, musí být zachována symetrie. Symetrie může být zachována jenom tak, že poteče každým sousedním drátkem proud $I/6$. Protože proud I teče do bodu B, drátkem AB musí téct proud $I/6$.

Nyní je čas obě řešení spojit. Pokud posíláme proud z A do nekonečna a z nekonečna do B, výsledek je stejný, jako bychom ho posílali z A do B. Můžeme tedy obě dvě připravené části sečíst a dostaneme, jaké proudy tečou jednotlivými částmi. Když sečteme oba proudy (které tečou ve stejném směru) v drátku AB, dostáváme $I/6 + I/6 = I/3$. O jiné drátky jsme se nezajímali a chybí nám informace, jaký proud jimi poteče. Mohli bychom ale principiálně v podobném duchu pokračovat dále. Nás v tomto případě zajímal celkový odpor sítě odporových drátů. Logicky pokud nám jde o odpor: jestliže teče drátkem třetinový proud, bude se obvod jevit jako by měl celkový odpor třetinový. Tedy platí $R = R_1/3$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EH ... z nuly na sto potřetí

Jako jedna z výkonnostních charakteristik automobilů se často udává doba, za jakou zvládnou nejrychleji zrychlit z $0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ na $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Vezměme si jako příklad auto, které to dokáže za $4\,\mathrm{s}$. Jakou dráhu by auto urazilo, pokud by se rozjíždělo s konstantním ryvem? Ryv je změna zrychlení za čas stejně jako zrychlení je změna rychlosti za čas. Ryv se často značí jako j.

Karel přemýšlel nad zrychlením aut.

Vyjdeme ze základního vztahu pro zrychlení v závislosti na čase od startu

$$a = jt\,.$$

Obdobně, jako pro pohyb s konstantním zrychlením, si můžeme odvodit vzorec pro aktuální rychlost integrací předchozího vztahu

$$v = \int_0^t jt' \mathrm{d}t' = \frac{1}{2} jt^2\,.$$

Z toho jsme schopni vypočítat ryv j

$$j = \frac{2v}{t^2} = 3{,}47\,\mathrm{m\cdot s^{-3}}\,.$$

V integrování pokračujeme a vypočítáme uraženou dráhu s

$$s = \int_0^t \frac{1}{2} j t'^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{6} j t^3 = \frac{1}{3} v t = 37{,}0\,\mathrm{m}\,.$$

To je mimochodem o $\frac{1}{3}$ kratší vzdálenost než v případě konstantního zrychlení. Rozjíždění s konstantním ryvem se využívá např. v letadlech, protože je to pro člověka příjemnější.

Poznámka na závěr – pokud dosadíme do vztahu pro zrychlení auta v čase 4 s, dostáváme $13{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což značí, že by zrychlení ve směru jízdy bylo vyšší, než je tíhové zrychlení. Toho by běžné auto pravděpodobně nemohlo dosáhnout. Ovšem vozidla, která mají speciálně tvarovanou karoserii a navíc třeba opačně orientovaná křídla než letadla, jako například vozy formule 1, to zvládnout mohou.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FA ... natáhnutá

Máme gumičku o hustotě ϱ vyrobenou z materiálu o modulu pružnosti E. Klidová délky gumičky je L (např. když leží na stole). Vezmeme jí a za jeden konec ji zavěsíme. Jaká bude nyní její délka? *Matěj si hrál s gumičkou.*

Jeden malý kousek gumičky o délce $\mathrm{d}l$ se natáhne na novou délku $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}l \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) ,$$

kde σ je napětí v daném místě. Průřez gumičky označme S. Napětí spočítáme jako

$$\sigma = \frac{F}{S}\,,$$

kde F je síla, která táhne gumičku k zemi. $F = Sl\varrho g$, kde l je vzdálenost příslušné části gumičky od jejího konce v **nenataženém** stavu (jinak bychom nemohli počítat s konstantní hustotou). Dosadíme

$$\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{l\varrho g}{E}\right) \mathrm{d}l\,.$$

$$L_1 = \int_0^{L_1} \mathrm{d}x = \int_0^{L} \left(1 + \frac{l\varrho g}{E}\right) \mathrm{d}l = L + \frac{L^2 \varrho g}{2E}\,.$$

K výsledku lze také dojít úvahou, že natažení gumičky v konkrétním bodě závisí lineárně na délce zbytku nenatažené gumičky. Tedy celková natažená délka je taková, jako kdybychom na gumičku zavěsili závaží, které má polovinu její hmotnosti a hmotnost gumičky nebrali v potaz.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FB ... prokrastinace

Matěj tráví čas sledováním videí na YouTube místo toho, aby se věnoval své práci. YouTube používá velmi sofistikovaný algoritmus, který po dokoukání videa navrhne několik dalších videí, která by vás mohla zajímat. Algoritmus je tak dobrý, že s pravděpodobností $p = 80\%$ se Matějovi nějaký z návrhů zalíbí a začne sledovat další video. Uvažujte, že video průměrně trvá $t = 7\,\mathrm{min}$. Jak dlouho bude v průměru trvat (od chvíle, kdy začal sledovat první video), než Matěje sledovaní videí omrzí a začne pracovat na vzorovém řešení této úlohy?

Může se vám hodit, že $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(x-1)^2}$ pro $|x| < 1$ a že $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Matěj řekl: Doplním později.

Pravděpodobnost, že se mu po videu žádné nezalíbí a skončí se sledováním, je $p' = 1 - p$. Aby Matěj shlédl $n$té video, musí mu předtím YouTube $n - 1$ krát úspěšně navrhnout další video. Jednotlivé návrhy jsou navzájem nezávislé jevy, pravděpodobnost, že shlédne n-té video, tedy je

$$p_\mathrm{n} = p^{n-1}\,.$$

Pravděpodobnost, že skončí s prokrastinací právě po $n$tém videu, je

$$P_\mathrm{n} = p' p_\mathrm{n} = (1-p)\,p^{n-1}\,.$$

A to mu zabere nt času. Průměrný čas strávený prokrastinací vypočítáme jako součet všech časů vynásobených příslušnými pravděpodobnostmi

$$t_\mathrm{p} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} (1-p)\,p^{n-1} nt = \frac{1-p}{p} t \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} np^n = \\ = \frac{1-p}{p} t \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{t}{1-p} = 35\,\mathrm{min}\,.$$

Lze očekávat, že Matěj stráví sledováním videí 35 min. Klidně se ale může stát, že se k napsání vzorového řešení nedostane do konce svého života. To se naštěstí nestalo.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FC ... spousta počítání

Matěj si koupil hodiny, jež ukazují čas ve čtyřiadvacetihodinovém formátu. Každá cifra se skládá z až sedmi rozsvícených diod (tedy celkem 28 diod). Každá z nich má spotřebu 0,1 mW. Matěj do hodin vložil čtyři nově koupené tužkové AAA baterie, ihned nastavil čas na 12:00 a pověsil si je na zeď. Jednou se chtěl podívat, kolik je hodin. Na okamžik zahlédl čas, ale v tom se honiny vybily a zhasly. Jaký čas zahlédl? Kapacita jedné AAA baterie je 2,5 Wh a neuvažujte jiné energetické ztráty než svícení diod.
Poznámka: *Šestka i devítka je tvořena šesti diodami, na hodinách není dvojtečka a všechny 4 cifry neustále svítí. Všechny zadané hodnoty jsou absolutně přesné.*

Matěj chtěl vymyslet jednoduchou úlohu, kterou bude těžké spočítat.

Hodiny vydrží pracovat řádově měsíce až roky na jednu sadu baterií. Spočítáme si tedy, kolik energie spotřebují za jeden den a dále nás bude zajímat jen zbytek kapacity po dělení touto denní energií. Můžeme uvažovat, že výměna číslic probíhá okamžitě (diody se rozsvěcí i zhasínají instantně). Ciferník si rozdělíme na jednotlivé cifry a spočítáme jejich průměrnou spotřebu za jeden den.

Na poslední cifře se neustále střídají dokola číslice 0 až 9. Průměrná spotřeba této cifry je

$$P_1 = \frac{6+2+5+5+4+5+6+3+7+6}{10} 0{,}1\,\mathrm{mW} = 0{,}49\,\mathrm{mW}\,.$$

Na desetiminutové cifře se pravidelně střídá 0 až 5. Její průměrná spotřeba je

$$P_2 = \frac{6+2+5+5+4+5}{6} 0{,}1\,\mathrm{mW} = 0{,}45\,\mathrm{mW}\,.$$

Na druhé cifře se dvakrát za den vystřídá 0 až 9 a pak 0, 1, 2, 3. Příslušná spotřeba tedy je

$$P_3 = \frac{2\,(6+2+5+5+4+5+6+3+7+6)+6+2+5+5}{24} 0{,}1\,\mathrm{W} = \frac{29}{60}\,\mathrm{mW}\,.$$

První je 10 hodin 0, 10 hodin 1 a 4 hodiny 2.

$$P_4 = \frac{10\cdot 6 + 10\cdot 2 + 4\cdot 5}{24} 0{,}1\,\mathrm{mW} = \frac{25}{60}\,\mathrm{mW}\,.$$

Za jeden den hodiny tedy spotřebují energii

$$E_1 = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)\cdot 24\,\mathrm{h} = 44{,}16\,\mathrm{mWh}\,.$$

Zbytek po dělení kapacity baterie je

$$E_\mathrm{z} = \left(2\cdot 5\cdot 10^3 \bmod 44{,}16\right)\,\mathrm{mWh} = 19{,}84\,\mathrm{mWh}\,.$$

Nyní je na hodinách 12:00 a bateriím zbývá energie E_z. To je necelá polovina denní spotřeby. Zkusíme tedy odečíst spotřebu za následujících 10 hodin:

$$\begin{aligned} E_\mathrm{d} &= (P_1 + P_2)\cdot 10\,\mathrm{h} + P_1\cdot 10\,\mathrm{h} + 8\cdot 2\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWh} + 2\cdot 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWh} \\ &= 16{,}90\,\mathrm{mWh}\,. \end{aligned}$$

Nyní máme 22:00 a zbývá pouze $19{,}84\,\mathrm{mWh} - 16{,}90\,\mathrm{mWh} = 2{,}94\,\mathrm{mWh}$. Během dvaadvacáté hodiny se spotřebuje

$$E_{22} = (P_1 + P_2)\cdot 1\,\mathrm{h} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWh} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWh} = 1{,}94\,\mathrm{mWh}\,.$$

Zbývá $2{,}94\,\mathrm{mWh} - 1{,}94\,\mathrm{mWh} = 1{,}00\,\mathrm{mWh} = 60{,}0\,\mathrm{mWmin}$. Nyní jsme si jednotky převedli na netradiční miliwattminuty a budeme numericky počítat po minutách. Je 23:00. Za "30 min" spotřebuje

$$\begin{aligned} E_{30\mathrm{min}} &= P_1\cdot 30\,\mathrm{min} + (6+2+5)\cdot 0{,}1\,\mathrm{mW}\cdot 10\,\mathrm{min} \\ &\quad + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mW}\cdot 30\,\mathrm{min} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mW}\cdot 30\,\mathrm{min} \\ &= 57{,}7\,\mathrm{mWmin}\,. \end{aligned}$$

Teď je 23:30 a zbývá $60{,}0\,\mathrm{mWmin} - 57{,}7\,\mathrm{mWmin} = 2{,}3\,\mathrm{mWmin}$. Zjistíme, že za jednu další minutu baterie ztratí

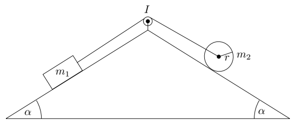
$$\begin{aligned} E_{1\mathrm{min}} &= 6\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWmin} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWmin} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWmin} + 5\cdot 0{,}1\,\mathrm{mWmin} \\ &= 2{,}1\,\mathrm{mWmin}\,. \end{aligned}$$

což nám dává zbytek 0,2 mWmin a lze snadno ověřit, že tato energie již nestačí na napájení po další minutu. Hodiny se vybijí v čase 23:31.

Tato úloha nemá obecné řešení (vzoreček). Jediný způsob, jak ji vyřešit, je takovýto numerický výpočet. Po celou dobu našeho výpočtu jsme nikde nezaokrouhlili a všechny hodnoty tedy zůstaly *přesné*. Prakticky ale můžeme znát kapacitu baterie i spotřebu diod jen s určitou přesností, která by jistě nestačila na určení přesného času, kdy se hodiny vybijí, protože při výpočtech jsme velmi často odečítali zbývající kapacity, přičemž by se jednotlivé nejistoty sčítaly. Dostali bychom proto velmi nepřesný výsledek.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FD ... střecha s válcem



Na střeše máme položená dvě tělesa, kvádr a homogenní válec, která jsou spojená tuhým provázkem. Nakloněné roviny, jimiž je střecha tvořena, svírají úhel $\alpha = 30.0^\circ$ s podložkou. Provázek je přehozený přes kladku o momentu setrvačnosti $I = 0{,}100\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ a poloměru $r_\mathrm{k} = 0{,}100\,\mathrm{m}$. Kvádr má hmotnost $m_1 = 5{,}00\,\mathrm{kg}$, válec má poloměr $r_\mathrm{v} = 0{,}20\,\mathrm{m}$ a hmotnost $m_2 = 10{,}0\,\mathrm{kg}$. S jakým zrychlením a jakým směrem se bude pohybovat kvádr? Tření mezi libovolným tělesem a střechou je $f = 0{,}50$. Zanedbejte valivý odpor. *Karel vymyslel další obměnu úlohy.*

Nejdříve pomocí rozboru sil určíme, jakým směrem se bude soustava pohybovat, případně zda se vůbec pohybovat bude.

Aby se tělesa pohybovala, musí velikost celkové síly působící na kvádr překonat třecí sílu $F_\mathrm{t} = fm_1g\cos\alpha = 21{,}24\,\mathrm{N}$. Na jednu stranu kvádr táhne střechorovná složka gravitační síly a na druhou stranu válec

$$F_2 = m_1g\sin\alpha - m_2g\sin\alpha = (m_1 - m_2)\,g\sin\alpha = -24{,}53\,\mathrm{N}\,.$$

Po vyčíslení zjišťujeme, že kvádr se bude pohybovat směrem nahoru, protože třecí síla je překonána. Celá soustava je tedy urychlována silou

$$F_0 = F_2 - F_\mathrm{t} = -\,(m_1 - m_2)\,g\sin\alpha - fm_1g\cos\alpha = 3{,}29\,\mathrm{N}\,.$$

Tato síla musí urychlovat kvádr i válec a zároveň roztáčet válec i kladku. Působí-li síla F na těleso o momentu setrvačnosti J ve vzdálenosti r od osy otáčení (kolmo na osu i spojnici s osou), podle změny momentu hybnosti můžeme najít vztah pro úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{a}{r}$

$$F_0r = J\varepsilon\,, \quad F_0 = \frac{J}{r^2}a\,.$$

Zrychlení si označíme a a vyjdeme z rovnosti sil

$$F_0 = (m_1 + m_2)\,a + \frac{I}{r_\mathrm{k}^2}a + \frac{I_\mathrm{v}}{r_\mathrm{v}^2}a\,,$$

kde $I_\mathrm{v} = m_2 r_\mathrm{v}^2/2$ je moment setrvačnosti válce.

$$F_0 = \left(m_1 + \frac{3}{2}m_2 + \frac{I}{r_\mathrm{k}^2}\right) a\,,$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\sin\alpha - f m_1 \cos\alpha}{m_1 + \frac{3}{2}m_2 + \frac{I}{r_\mathrm{k}^2}} g = 0{,}110\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Kvádr se bude pohybovat se zrychlením $0{,}110\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ směrem nahoru.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha FE ... z nuly na sto podruhé

Jako jedna z výkonnostních charakteristik automobilů se často udává doba, za jakou zvládnou nejrychleji zrychlit z $0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ na $100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Vezměme si jako příklad auto, které to dokáže za $4\,\mathrm{s}$. Jakou dráhu auto urazí, pokud v průběhu této doby zrychluje s konstantním výkonem?

Karel přemýšlel nad zrychlením aut.

Výkon je v našem případě změna kinetické energie za čas, tedy

$$P = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}mv^2}{\mathrm{d}t} = mva = m\dot{x}\ddot{x}\,,$$

kde m je hmotnost auta, $v = \dot{x}$ je okamžitá rychlost a $a = \ddot{x}$ je okamžité zrychlení. Nicméně pro náš výpočet je praktičtější vyjádření s derivací, které zintegrujeme

$$P = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}m\dot{x}^2}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad Pt + E_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\,,$$

kde E_0 je integrační konstanta odpovídající počáteční energii. Protože jde o pohyb z klidu, bude tato energie nulová. Vyjádříme si rychlost, kterou pak zintegrujeme

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2P}{m}}t^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}t^{\frac{3}{2}}\,.$$

Z vyjádření rychlosti plyne

$$\sqrt{\frac{2P}{m}} = \frac{\dot{x}}{t^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Dosazením do vztahu pro výpočet dráhy dostáváme $x = \frac{2}{3}vt \doteq 74{,}1\,\mathrm{m}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FF ... kroužek

Mějme nehomogenní tyč délky L a hmotnosti M zavěšenou na jednom jejím konci. Vzdálenost těžiště tyče od bodu zavěšení je l a příslušný moment setrvačnosti J (vůči bodu závěsu). Na tyč upevníme kroužek zanedbatelných rozměrů a hmotnosti m do takové vzdálenosti x od bodu závěsu, že frekvence vlastních kmitů vzroste na dvojnásobek. Najděte podmínku na hmotnost m, aby bylo x určeno jednoznačně, a tuto jednoznačnou hodnotu x také vyjádřete.

Kuba rozmýšlel, které řešení vybrat.

Poloviční rychlost kmitů odpovídá dvojnásobné periodě nebo poloviční úhlové frekvenci. Úhlovou frekvenci tyče spočítáme ze vztahu

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{J}}\,.$$

Celkový moment setrvačnosti je aditivní, tedy po upevnění kroužku máme

$$J^* = J + mx^2\,.$$

Dále pro novou polohu těžiště máme rovnici

$$Ml + mx = (M + m)\,l^*\,.$$

Nyní můžeme pro novou úhlovou frekvenci psát

$$\omega^* = \sqrt{\frac{(M+m)\,gl^*}{J^*}} = \sqrt{\frac{g\,(Ml+mx)}{J+mx^2}}\,.$$

Řešením rovnice $\omega^* = 2\omega$ dostáváme vztah

$$x = \frac{J}{8Ml}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{48l^2M^2}{Jm}}\right)\,.$$

Vidíme, že obě řešení zdegenerují do jednoho, pokud je odmocnina nulová, tedy pokud platí

$$m = \frac{48M^2l^2}{J}\,.$$

V tomto případě dostáváme pro polohu kroužku vztah

$$x = \frac{J}{8Ml}\,,$$

což je hledaný výsledek.

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Úloha FG ... Matějovy čtyři koule

Čtyři stejné homogenní koule jsou položeny na hromádce na vodorovné podložce ze stejného materiálu, jako jsou koule. Středy koulí tvoří pravidelný čtyřstěn. (tři koule jsou na zemi položené do trojúhelníku a na nich leží čtvrtá). Jaký musí být minimální koeficient statického tření, aby zůstaly v klidu? *Matěj aranžoval pomeranče.*

Díky symetrii stačí rozebrat síly působící pouze na jednu spodní kouli. Sílu, kterou na ní působí horní koule, si rozložíme na složku kolmou na povrch F_n a tečnou složku F_t. Z geometrie čtyřstěnu vyplývá, že pro úhel φ, který svírá vektor síly F_n s vodorovnou rovinou, platí $\mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{2}$. Pro klidový stav tělesa platí dvě podmínky:

- Součet momentů sil musí být nulový. To znamená, že třecí síla mezi spodní koulí a podložkou musí být stejná, jako síla F_t (jen působí jiným směrem).

- Výslednice všech sil musí být nulová. Nás zajímá rovnováha vodorovných složek F_n, F_t a třecí síly, z čehož dostáváme

$$F_\mathrm{n}\cos\varphi - F_\mathrm{t}\sin\varphi - F_\mathrm{t} = 0\,,$$
$$F_\mathrm{n}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + 1} = F_\mathrm{t}\,.$$

Koule nebudou prokluzovat, pokud

$$fF_\mathrm{n} \geq F_\mathrm{t}\,,$$
$$f \geq \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \doteq 0{,}318\,.$$

Mohlo by se zdát, že prokluz může nastat i mezi koulí a zemí, ale k tomu nemůže dojít, protože kolmá síla, kterou koule působí na zem, je $4F_g/3$, kde F_g je tíha jedné koule. Tato síla je větší, než $F_\mathrm{n} = F_g/\left(3\sin\varphi\right)$.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha FH ... otáčky nádoby

Máme $V = 2\,\mathrm{l}$ vody ve válci s podstavou o poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$. Jakou nejmenší výšku musí mít tato válcová nádoba, aby se žádná voda nevylila, když válec necháme dlouhou dobu točit úhlovou rychlostí $\omega = 5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ kolem jeho osy? *Matěj rád točí s čímkoliv.*

Po delší době se voda ustálí v určitém statickém tvaru tak, že se bude otáčet stejnou úhlovou rychlostí jako nádoba. Našim úkolem je najít funkci popisující výšku hladiny v závislosti na vzdálenosti od osy. Základní myšlenka je taková, že voda zaujímá tvar s minimální potenciální energií a hladina vody leží na ekvipotenciální ploše (takové, že ve všech místech je je stejný potenciál). Uvědomíme-li si, že ve svislém směru působí homogenní tíhové zrychlení a v horizontálním směru je zrychlení úměrné vzdálenosti od osy, musí hladina vody kopírovat tvar paraboloidu.

Označme funkci $h(r)$ závislost výšky hladiny na vzdálenosti od osy r. Jelikož je povrch vody kolmý na směr zrychlení, musí být směrnice této funkce stejná, jako poměr odstředivého a tíhového zrychlení.

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = \frac{\omega^2 r}{g}\,.$$

Funkci $h(r)$ získáme integrací

$$h(r) = \int \mathrm{d}h = \int \frac{\omega^2 r}{g}\mathrm{d}r = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, jež lze zjistit z počátečních podmínek, tedy z objemu V, který se musí zachovávat. Vodu si rozsekáme na tenké válcové pláště o objemu $2\pi r h(r)\mathrm{d}r$.

$$V = \int_0^R 2\pi r h(r)\mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\omega^2 r^3}{2g} + Cr\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + C\pi R^2\,,$$

$$C = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\,.$$

Hodnota funkce $h(r)$ v bodě R udává mezní výšku nádoby, při které z ní nic nevyteče.

$$h(R) = \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{V}{\pi R^2} = 0{,}070\,\mathrm{m}\,.$$

Pozn. náš model neuvažuje dno, takže je potřeba ještě zkontrolovat podmínku, že hladina uprostřed nádoby nevychází záporně. Dosazením hodnot ze zadání zjistíme, že vychází kladně.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha GA ... lano

Na zemi leží smotané lano o délkové hustotě ϱ. Jeden jeho konec chytneme a konstantní rychlostí v ho zvedneme do výšky h. Jaký je rozdíl práce, kterou na to musíme vynaložit, a součtu kinetické a potenciální energie uspořádaného pohybu lana, kterou mu tím dodáme?
Nápověda: *Skutečně to není nula.* *Jáchym měl pocit, že mu chybí nějaká energie.*

Ve chvíli, kdy je ve vzduchu hmotnost lana m, působí na něj tíhová síla $F_G = -mg$. My musíme působit silou F, kterou určíme z druhého Newtonova zákona jako

$$F + F_G = \dot{p} = m\dot{v} + \dot{m}v = \dot{m}v\,. \tag{2}$$

Zde jsme využili toho, že $\dot{v} = 0$, protože rychlost zvedání je konstantní. Za určitý čas $\mathrm{d}t$ zvedneme $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ lana, což nám dává vztah pro časovou derivaci rychlosti

$$\dot{m} = \varrho v\,.$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice (2) dostáváme

$$F = \dot{m}v - F_G = \varrho v^2 + mg = \varrho v^2 + x\varrho g\,,$$

kde x značí již zvednutou délku lana. Pro výpočet výsledné práce nám stačí tento vztah zintegrovat od nuly do h

$$W = \int_0^h F\mathrm{d}x = \int_0^h \varrho v^2 + x\varrho g \mathrm{d}x = \left[x\varrho v^2 + \frac{1}{2}x^2\varrho g\right]_0^h = h\varrho v^2 + \frac{1}{2}h^2\varrho g\,.$$

Zvednutím konce lana do výšky h mu udělíme kinetickou a potenciální energii

$$E = \frac{1}{2}h\varrho v^2 + \frac{1}{2}h^2\varrho g\,,$$

což vede na výslednou energetickou „ztrátu“

$$\Delta E = W - E = \frac{1}{2}h\varrho v^2\,.$$

Energie jako taková se samozřejmě nikam neztratí, pouze se přemění na energii oscilací lana. Při tomto způsobu zvedání lana se vždy malé části lana o délce dx urychlí na rychlost v na nulové dráze a za nulový čas, což samozřejmě není možné. Skutečné lano je pružné, takže v něm ke zrychlování dochází postupně. Můžeme samozřejmě uvažovat, že lano je dokonale tuhé, takže k oscilacím a „ztrátám“ energie přeci nemůže docházet, ale není těžké si rozmyslet, že takové lano by vlastně tímto způsobem ani nešlo zvednout.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha GB ... solární tyč

Mějme nekonečně dlouhý, tenký proužek polovodiče, který je 1 cm *široký a jehož měrná plošná vodivost je přímo úměrná osvětlení s konstantou úměrnosti* $\alpha = 0{,}03\,\mathrm{S{\cdot}lx^{-1}}$. *Ve výšce* 1 m *nad osou polovodiče umístíme bodový zdroj světla o svítivosti* 2 cd. *Na kraje polovodiče připojíme nekonečně dlouhé a dokonale vodivé elektrody, mezi které přivedeme napětí* 7 V. *Jaký proud v ampérech poteče mezi elektrodami?*

Mikuláš má rád, když ostatní počítají nepěkné integrály.

Osvětlení polovodiče klesá jednak kvadraticky se vzdáleností, jednak s kosinem úhlu dopadu paprsků na polovodič, celkově tedy podle vzorce

$$\frac{hI}{\left(\sqrt{h^2+x^2}\right)^3}\,,$$

kde h je výška lampy nad polovodičem, I je svítivost zdroje a x je vzdálenost od středu polovodiče. Měrný odpor je pak dán vzorcem

$$\frac{\left(\sqrt{h^2+x^2}\right)^3}{hI\alpha}$$

a odpor na element délky dx je

$$\frac{y\left(\sqrt{h^2+x^2}\right)^3}{hI\alpha\mathrm{d}x}\,,$$

kde y je šířka proužku. Převrácenou hodnotu odporu získáme integrováním převrácené hodnoty měrného odporu, chová se to totiž jako paralelní zapojení nekonečného počtu rezistorů.

$$\frac{1}{R} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{hI\alpha}{y\left(\sqrt{h^2+x^2}\right)^3} \mathrm{d}x,$$

Řešíme substitucí hyperbolickými funkcemi

$$\frac{1}{R} = \frac{I\alpha}{hy}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I\alpha}{hy}\,.$$

Proud pak získáme podle vzorce

$$I_{\mathrm{El}} = \frac{U}{R} = \frac{2UI\alpha}{hy}\,.$$

Dosazením dostáváme $I_{\mathrm{El}} = 84\,\mathrm{A}$.

Mikuláš Matoušek
`mikulas@fykos.cz`

Úloha GC ... ohňostroj

Orgové si zapomněli na Silvestra koupit rachejtle, tak se jali zkonstruovat kopii Car-bomby. Předpokládejte, že 2 % energie uvolněné při reakci ${}^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n}^0 + \gamma$ odejde ve formě záření, a to v podobě jednoho fotonu na reakci. Jak rychle musí orgové utíkat pryč, aby spatřili „ohňostroj" ve viditelném světle (550 nm)? Spočítejte rozdíl $c - v$ mezi rychlostí světla a hledanou rychlostí. Klidové hmotnosti částic jsou $m({}^2_1\mathrm{D}) = 1\,876{,}1\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$, $m({}^3_1\mathrm{T}) = 2\,809{,}4\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$, $m({}^4_2\mathrm{He}) = 3\,728{,}4\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$, $m(\mathrm{n}^0) = 939{,}6\,\mathrm{MeV{\cdot}c^{-2}}$.

Lukáš, který opravdu zapomněl na nákup.

Počet fotónov nás nezaujíma, môžeme sa sústrediť iba na jednu reakciu a fotón vznikajúci pri nej. Celkovú energiu ΔE uvoľnenú pri tejto reakcii vypočítame zo zákona zachovania energie (môžeme predpokladať, že častice vstupujúce do reakcie majú zanedbateľnú kinetickú energiu) v tvare

$$m({}^2_1\mathrm{D})c^2 + m({}^3_1\mathrm{T})c^2 = \Delta E + m({}^4_2\mathrm{He})c^2 + m(\mathrm{n}^0)c^2\,.$$

Tu $\Delta E \doteq 17{,}5\,\mathrm{MeV}$ zahŕňa kinetické energie všetkých častíc, ktoré pri reakcii vznikli. Energia fotónu (celková aj kinetická, lebo pokojová hmotnosť fotónu je 0) je podľa zadania

$$0{,}02\Delta E \doteq 0{,}35\,\mathrm{MeV}\,,$$

vlnová dĺžka emitovaného fotónu (v ťažiskovej sústave reakcie) je teda

$$\lambda = \frac{hc}{E} \doteq 3{,}5\,\mathrm{pm}\,.$$

Pri úteku od „ohňostroja" rýchlosťou v dochádza k Dopplerovmu javu; pozorovaná frekvencia je daná vzťahom

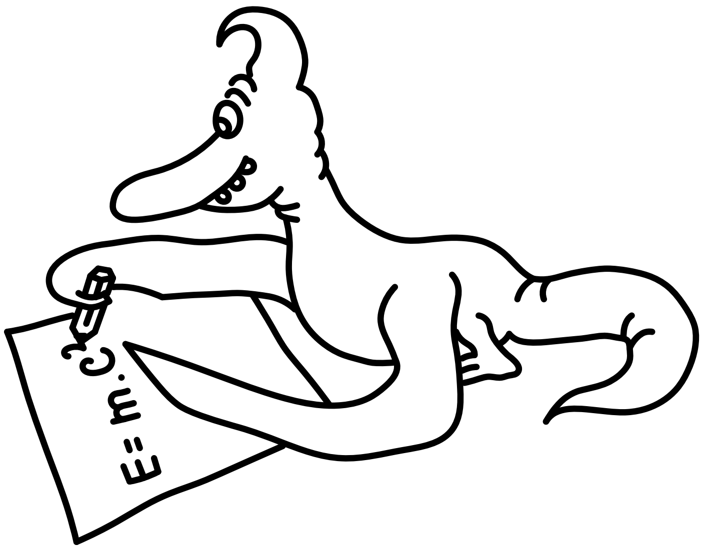
$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,.$$

Keďže požadovaná vlnová dĺžka λ' je oveľa väčšia ako λ, musí byť rýchlosť $v \approx c$ a môžeme aproximovať

$$\frac{\lambda'}{\lambda} \approx \sqrt{\frac{2c}{c-v}} \quad \Rightarrow \quad c - v \approx 2c \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 .$$

Dostávame $c - v \doteq 8 \cdot 10^{-11} c \doteq 0{,}024\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, teda od Cár bomby treba bežať veľmi blízko rýchlosti svetla.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.