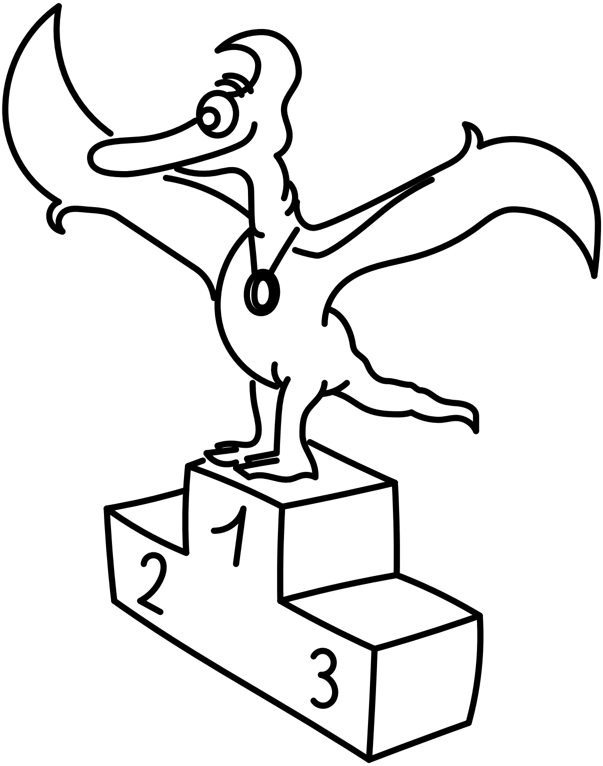
Řešení úloh 9. ročníku FYKOSího Fyziklání



Úloha AA ... nestejné poloviny

Jeden chytrý nejmenovaný organizátor poradil Karlovi, že až pojede na nákup po okresní silnici, tak první polovinu cesty má jet rychlostí $v_1 = 70\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, protože je tam spousta zatáček a druhou polovinu má jet rychlostí $v_2 = 93\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, protože policisté u cesty měří s chybou minimálně $3\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a cesta je tam rovná. Karel se vydal na cestu, ale uvědomil si, že mu organizátor neřekl, jestli myslí polovinu času jízdy, nebo polovinu dráhy. Karel se chce řídit radou, ale zajímalo by ho, v jakém případě dojede dříve a o jaký časový interval. Vzdálenost začátku a konce cesty je $d = 5{,}2\,\mathrm{km}$. Zanedbejte čas potřebný na zrychlení.

Karel si zase vymýšlel historky „ze života“.

Jako první variantu vypočítáme dobu t_d, kterou by Karlovi zabrala jízda, kdyby jel každou polovinu dráhy udanými rychlostmi.

$$t_d = \frac{\frac{d}{2}}{v_1} + \frac{\frac{d}{2}}{v_2} = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{d}{2}\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \doteq 3{,}9\,\mathrm{min}\,.$$

Nyní vypočítejme dobu t_t, kterou by Karel jel, kdyby rychlost držel vždy polovinu doby t_t. Označme si první část dráhy d_1 a druhou d_2 ($d = d_1 + d_2$).

$$\frac{t_t}{2} = \frac{d_1}{v_2} = \frac{d_2}{v_2} \quad\Rightarrow\quad d_2 = d_1\frac{v_2}{v_1}\,,$$

$$d = d_1 + d_2 = d_1\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) \quad\Rightarrow\quad d_1 = \frac{d}{1 + \frac{v_2}{v_1}}\,,$$

$$t_t = 2\frac{d}{v_1\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right)} = 2\frac{d}{v_1 + v_2} \doteq 3{,}8\,\mathrm{min}\,.$$

Již tedy víme, že rychlejší bude držet rychlosti polovinu času cesty. Stačí tedy už jen vypočítat rozdíl obou časů

$$\Delta t = t_d - t_t = \frac{d}{2}\left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} - 4\frac{1}{v_1 + v_2}\right) = \frac{d}{2}\frac{\left(v_1 - v_2\right)^2}{v_1 v_2\left(v_1 + v_2\right)} \doteq 4{,}7\,\mathrm{s}\,.$$

Rozdíl mezi oběma interpretacemi „udržování rychlosti po polovinu cesty“ je tedy zhruba 4,7 s. Problém u odevzdávání mohl nastat, pokud jste příliš zaokrouhlovali a snažili jste se odevzdat rozdíl dvou mezivýsledků se zaokrouhlovací chybou.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AB ... ibyšta

Ryba reguluje hloubku plavání nastavením své průměrné hustoty na hodnotu stejnou, jakou má voda. Provádí to změnou objemu vzduchu v porézních kostech nebo v plynovém měchýři. Předpokládejte, že s vyfouknutým měchýřem má ryba hustotu ϱ_1, hustota vody v dané hloubce je $\varrho_2 < \varrho_1$. O jakou část svého koncového (nafouknutého) objemu musí ryba zvětšit objem vzduchového měchýře, aby vyrovnala svou hustotu na hustotu vody? Požadujeme obecný výsledek, ve kterém se smí vyskytovat pouze hustoty ϱ_1, ϱ_2. Do objemu ryby se počítá i objem měchýře.

Domča se stala fanynkou rybářství.

Hmotnost ryby (značme ji m_1) se nemění. Na počátku ji můžeme vyjádřit jako $m_1 = \varrho_1 V_1$, kde V_1 je počáteční objem ryby. Po nafouknutí má mít ryba hustotu ϱ_2 a koncový objem V_2, hmotnost tedy vyjádříme jako $m_1 = \varrho_2 V_2$. Srovnáním obou výrazů pro hmotnost dostaneme

$$\varrho_1 V_1 = \varrho_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} V_2 \,.$$

Změnu objemu vyjádříme jako rozdíl objemů $V_2 - V_1$ dělený koncovým objemem V_2, tj.

$$\delta V = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = 1 - \frac{V_1}{V_2} = 1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \,.$$

Pro zajímavost – u sladkovodních ryb tvoří plynový měchýř kolem 10 % objemu těla a hustota vody se v teplotním rozsahu 0 °C–30 °C změní pouze o 0,5 %. Ryba se tedy může bez problému vznášet při jakékoli hustotě a navíc může plynový měchýř použít k poměrně rychlému zanoření/vynoření bez zbytečných energetických výdajů na plavání.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

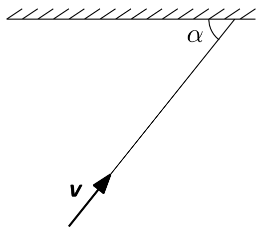
Úloha AC ... bum, prásk a praskne zrcadlo

Jak rychle se přibližuje těleso ke svému zdánlivému obrazu v rovinném zrcadle, pokud má rychlost $\boldsymbol{v}$, která svírá úhel α s rovinou zrcadla (viz obrázek)?

Karel přemýšlel nad zemí za zrcadlem.

V okamžiku, kdy je předmět vzdálený s od zrcadla, je jeho obraz vzdálený také s od zrcadla, obraz a předmět jsou tedy vzdálené $2s$. Pokud se tedy bude přibližovat k zrcadlu předmět rychlostí u, která bude kolmá na rovinu zrcadla, pak se k sobě budou předmět a obraz přibližovat rychlostí $w = 2u$.

Stačí nám tedy určit rychlost přibližování předmětu k zrcadlu u, kterou získáme z rozložení rychlosti $\boldsymbol{v}$ do směru kolmého na zrcadlo a směru se zrcadlem rovnoběžného. Rychlost přibližování tělesa k zrcadlu je $u = v \sin \alpha$. Rychlost přibližování předmětu k obrazu je pak $w = 2v \sin \alpha$.



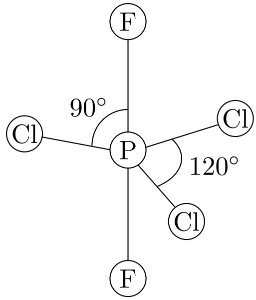
Obr. 1: Náčrt pohybu tělesa k zrcadlu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AD ... symetrická

Určete počet os symetrie (osové, ne rotační) a počet rovin symetrie molekuly $\mathrm{PF_2Cl_3}$*, která má tvar trigonální bipyramidy a je znázorněna na obrázku.* *Mirek o narušení* P *symetrie.*

Osy symetrie jsou tři, leží na spojnicích jednotlivých atomů chloru s centrálním atomem fosforu. Roviny symetrie jsou čtyři, jedna je horizontální a obsahuje všechny atomy chloru, zbylé tři jsou vertikální a obsahují vždy jeden atom chloru a oba atomy fluoru.



Obr. 2: Model molekuly $\mathrm{PF_2Cl_3}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha AE ... zahřívací

Člověk o hmotnosti $m = 70\,\mathrm{kg}$ *produkuje po nasycení v klidu přibližně* $Q = 8\,\mathrm{MJ}$ *tepla za den (bazální metabolismus). Odhadněte, o kolik stupňů by vzrostla za den tělesná teplota člověka při zamezení výměny tepla s okolím. Průměrné měrné teplo lidského těla je asi* $4\,\mathrm{kJ{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$*.*

Verči bylo vedro.

Kdybychom zamezili výměně tepla s okolím, muselo by se všechno vyprodukované teplo $Q = 8\,\mathrm{MJ}$ spotřebovat na zvýšení tělesné teploty o Δt. Jelikož známe hmotnost člověka i jeho tepelnou kapacitu, jednoduchým výpočtem pomocí vzorce $Q = mc\Delta t$ dostáváme

$$\Delta t = \frac{Q}{mc} \doteq 29\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Teplota lidského těla by za den stoupla o $29\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Úloha AF ... silný proud

Dva kamarádi bydlí každý v jednom domě na protějších březích řeky. Domy jsou přesně proti sobě. Když se chtějí sejít, tak musí jeden z nich vždy přeplavat řeku. Chtějí ji přeplavat vždy tak, aby doplavali akorát k protějšímu domu. Řeka však teče rychlostí v*, proto musí vůči směru proudu vody plavat pod jistým úhlem* α*. Oba kamarádi umí plavat rychlostí* $v_k = 2v$ *(vůči vodě). Jaký musí být úhel mezi směrem plavání plavce a směrem toku řeky? Plavec není hloupý a v průběhu plavání nemění směr.* *Lydka si listovala ve starých sešitech.*

Úloha je jednoduchá, pokud si uvědomíme, že plavec vzhledem k soustavě spojené s domy na březích a čekajícím kamarádem plave po přímce. V tom případě si můžeme rychlost plavce rozložit na složku, která vyrovná rychlost toku řeky (ta má velikost $v_y = v$), a druhou složku, díky které se bude pohybovat dopředu. Tu si dopočítáme z pravoúhlého trojúhelníku

$$v_x = \sqrt{v_k^2 - v_y^2} = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v\,.$$

Úhel, který svírá směr plavce a spojnice obou domů, je

$$\beta = \mathrm{tg}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ\,.$$

Otázka v zadání byla na úhel mezi plavcem a tokem řeky. Hledaný úhel je $\alpha = \beta + 90^\circ = 120^\circ$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AG ... finanční stránka výletu

Karel se rozhodl, že pojede do Brna autem, a zajímalo by ho, na kolik ho jedna cesta tam a zpátky vyjde. Kombinovaná spotřeba (nafty) jeho auta je $v = 4{,}5\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}$. Nicméně reálná spotřeba je o $k = 20\,\%$ vyšší (kvůli hmotnosti nákladu, stylu jízdy, povaze trasy, valivému odporu zimních pneumatik a dalším faktorům). Trasa, kterou se chystá jet, má $d = 215\,\mathrm{km}$ v jednom směru. Naftu pořídil za $Z = 35{,}5\,\mathrm{Kč{\cdot}l^{-1}}$. Určete cenu zpáteční cesty v korunách.

Karel chtěl dát jednoduchou úlohu, která má v životě uplatnění (no, pokud tedy máte auto).

Celková dráha, kterou se Karel chystá ujet, je $s = 2d = 430\,\mathrm{km}$. Reálnou spotřebu můžeme vyjádřit jako

$$w = (1 + k)\,v = 5{,}4\,\mathrm{l}/100\,\mathrm{km}\,.$$

Objem pohonných hmot, který se spotřebuje, bude součin dráhy a spotřeby

$$V = sw = 2d\,(1 + k)\,v \doteq 23{,}3\,\mathrm{l}$$

a celková cena obou cest

$$X = VZ = 2d\,(1 + k)\,vZ \doteq 824\,\mathrm{Kč}\,.$$

Celková cena výletu bude 824 Kč, ovšem bez amortizace.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AH ... interesantní případ překulení

Jakou minimální kinetickou energii E_{min} musí mít homogenní váleček s poloměrem R a hmotností m valící se po vodorovné rovině, aby se v homogenním tíhovém poli velikosti g převalil přes práh o výšce H? *Karel nechtěl brzdit při jízdě autem.*

Úloha je velice jednoduchá. Stačí si uvědomit, že v nejlepším případě se bude moci přeměnit kinetická energie beze ztrát na potenciální energii polohovou. Jako obvykle tedy počítáme se zákonem zachování mechanické energie. Stačí pak vyjádřit změnu potenciální energie v homogenním tíhovém poli. Získáváme $E_{\mathrm{min}} = \Delta E_p = mgH$. Hledaná odpověď je tedy, že minimální kinetická energie musí být mgH.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BA … stabilizace voru ledního medvídka

Na čtvercovém voru (plavidle s dostatečně malou hustotou, aby se nepotopilo ani při námi požadovaném zatížení) o straně a pluje lední medvídek. Medvídek jde k okraji voru a chce chytit rybičku. Kdyby byl strašně chytrý a měl na voru železnou kotvu (o hustotě ϱ_k), kterou by přehodil přes okraj voru přesně na opačné straně voru, jakou by tato kotva musela mít hmotnost, aby byl vor vodorovně? Kotvu spouští do kapaliny o hustotě ϱ, lední medvídek má hmotnost m, hmotnost voru je M. Hmotnost vyjádřete pomocí známých veličin.

Karel chtěl, aby se medvídek nepotopil.

Aby byl vor vodorovný, pak je potřeba, aby na něj působila stejná síla na obou stranách. Na straně medvídka působí na vor tíhová síla $F_1 = mg$. Na druhé straně pak působí síla rovná rozdílu tíhové a vztlakové síly na kotvu $F_2 = m_k g - \varrho V g$, kde $m_k = \varrho_k V$ je hmotnost kotvy a V je její objem. Objem nemáme zadaný, proto ho vyjádříme z rovnice $F_1 = F_2$:

$$mg = \varrho_k V g - \varrho V g \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\varrho_k - \varrho}\,,$$

Tedy hmotnost kotvy bude $m_k = \varrho_k m/(\varrho_k - \varrho)$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BB … ztraceni

Mišo s Lukášem se vydali na výlet, teplota byla přesně $t = 25\,^\circ\mathrm{C}$, ptáčci zpívali a oni opojeni jarem ztratili pojem o tom, kam přesně se dostali. Brzy však narazili na koleje, a tak věděli, že jsou někde mezi městy A a B. Mišo, vlakový guru, k tomu přidal fakt, že z obou těchto měst vyjíždí ve stejném okamžiku dva motorové vláčky, které těsně před rozjezdem ve stejnou chvíli zahoukají. Za chvíli skutečně uslyší houkání z jednoho směru a za $\Delta\tau = 14\,\mathrm{s}$ poté i z opačného směru. O jakou vzdálenost to mají cestou podél rovných kolejí na jedno z nádraží blíž než na to ve druhém městě? Pro rychlost zvuku ve vzduchu z hlediska závislosti na teplotě platí vztah $v = v_0 + 0{,}606t$, kde $v_0 = 331{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a t je teplota v °C. Počítejte s přesností na desítky metrů.

Kiki se ztratila na kampusu, takže v tom nechce být sama.

Pomocí zadaného vztahu $v = v_0 + 0{,}606t$ lze určit, jaká je při zadané teplotě rychlost zvuku: $v = 346{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Zvuk dorazil z jednoho nádraží za dobu $t_1 = s_1/v$ z druhého za dobu $t_2 = s_2/v$, kde s_1 je vzdálenost mezi nádražím jednoho města a Mišem a Lukášem a s_2 je obdobně vzdálenost nádraží druhého města a našich dvou výletníků. Po odečtení těchto dob dostáváme $\Delta\tau = \Delta s/v$, přičemž Δs je to, co nás zajímá, tedy o kolik se od sebe obě vzdálenosti liší. Rozdíl $\Delta\tau$ známe, takže můžeme spočítat, že jedno z nádraží je blíž o $\Delta s = \Delta\tau v(t) \doteq 4\,850\,\mathrm{m}$.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha BC … plastelínová srážka

Mišo rozjel po kolejích jeden ze svých milovaných vláčků na rychlost v (vůči nehybným kolejím) a odpovídající hybnost p. Vláček se po těchto dokonale rovných kolejích pohybuje bez tření. Kde se vzala, tu se vzala, zlomyslná Radka, která hodila po vláčku kus plastelíny. Vzhledem k tomu, že je velice rafinovaná, tak si kouli připravila a hodila rovnoběžně se směrem jízdy rychlostí $3v$

(vůči kolejím) s hybností $p/3$. Vláček byl zasažen přímo zezadu a koule na něm zůstala držet. Jakou rychlostí se pohyboval vláček po srážce (vyjádřenou pomocí v)? Vliv gravitace zanedbejte.

Karel házel krmení kachnám.

Vyjádříme si hmotnost vláčku M z definice hybnosti $p = mv$, tedy $M = p/v$ a obdobně hmotnost plastelíny je $m = p/(9v)$. Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti. Celková hybnost po srážce bude $p_\mathrm{f} = p + p/3 = 4p/3$. Celková hmotnost soustavy je $m_\mathrm{f} = M + m = 10p/(9v)$. Rychlost soustavy tedy bude

$$v_\mathrm{f} = \frac{p_\mathrm{f}}{m_\mathrm{f}} = \frac{6}{5}v\,.$$

Konečná rychlost vláčku s plastelínou po srážce je $6v/5$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha BD ... jůů, Pendolíno!

Strojvůdci osobního vlaku se zazdálo, že poznává strojvůdce protijedoucího Pendolina. Sleduje ho tedy, aby se přesvědčil. Vypočítejte maximální úhlovou rychlost jeho hlavy ω_max. Vlaky jedou po přímých rovnoběžných kolejích rychlostmi $v_\mathrm{os} = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $v_\mathrm{p} = 50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (obě vůči kolejím). Vzdálenost trajektorií vlaků je $d = 5{,}0\,\mathrm{m}$. Pohyb očí zanedbejte.

Erik si vzpomněl, o čem mluvil s Lukášem cestou ze soustředění.

Úlohu můžeme vyřešit velice rychle, uvědomíme-li si, že maximální úhlové rychlosti dosáhne při otáčení hlavou právě v okamžiku, kdy se strojvůdci míjejí. Stačí pak uvážit, že se vůči sobě pohybují rychlostí, která je součtem jejich rychlostí a že si můžeme v daném okamžiku představit, že se jeden pohybuje vůči druhému po kružnici s poloměrem d. Maximální úhlová rychlost je

$$\omega_\mathrm{max} = \frac{v_\mathrm{os} + v_\mathrm{p}}{d} = 16\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \doteq 920\,{}^\circ\cdot\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Maximální úhlová rychlost, kterou by strojvůdce otáčel hlavou, je $16\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Erik Hendrych
erik@fykos.cz

Úloha BE ... evakuace balonku

Pouťový balonek se v klidu pohupoval ve větru, když si náhle všiml, že si ho chce koupit jedno pěkně protivné, ukřičené dítě. Balonek na nic nečekal a teleportoval se pryč. Bohužel se přemístil přímo do evakuované nádoby a praskl. Objem balonku byl původně $V_1 = 5{,}0\,\mathrm{l}$ a vnitřní tlak byl $p_1 = 104\,\mathrm{kPa}$, tedy jen o něco málo vyšší než atmosférický, a teplota plynu (vzduchu) v balonku byla $T = 30\,\mathrm{^\circ C}$. Objem evakuované nádoby byl $V_2 = 100\,\mathrm{l}$ a teplota v okolí byla taktéž T. Určete tlak p_2 uvnitř nádoby potom, co se tlak a teplota ustálí, jestliže nádoba není tepelně izolována.

Mirek chtěl zachránit balonek, ale pak si to rozmyslel.

Využít stavovou rovnici ideálního plynu přímo na rozpínání vzduchu z prasklého balonku v nádobě není možné, ale ani to nebudeme potřebovat. Na začátku máme látkové množství n v objemu V_1 za tlaku p_1 při teplotě T, na konci máme stejné látkové množství, objem V_2, stejnou teplotu (vyrovná se s okolím) a zbývá určit tlak. Na porovnání počátečního a koncového stavu již lze stavovou rovnici využít, platí tedy

$$\frac{p_1V_1}{nT} = \frac{p_2V_2}{nT} \,.$$

Jedná se jednoduše o izotermický děj, výsledný tlak v nádobě bude určen Boyle-Mariottovým zákonem

$$p_2 = p_1\frac{V_1}{V_2} \,.$$

Po číselném dosazení vyjde $p_2 = 5{,}2\,\mathrm{kPa}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha BF ... tlak v nitru Země

Nalezněte pomocí rozměrové analýzy vztah pro výpočet tlaku v nitru planety. Ve vztahu budou vystupovat pouze hmotnost planety M, poloměr planety R, gravitační konstanta $G = 6{,}7\cdot10^{-11}\,\mathrm{N\cdot kg^{-2}\cdot m^2}$ a bezrozměrná konstanta C. Do vztahu dosaďte hodnoty $R = 6{,}4\cdot10^6\,\mathrm{m}$, $M = 6{,}0\cdot10^{24}\,\mathrm{kg}$ a odhadněte tak tlak v nitru Země pro $C = 1$.

Mirek by nejradši řešil všechny úlohy pomocí rozměrové analýzy.

Pro tlak hledáme vztah ve tvaru $p = CG^aM^bR^c$. Po rozepsání newtonu do součinu základních jednotek SI dostaneme $[G] = \mathrm{kg^{-1}\cdot m^3\cdot s^{-2}}$, pro tlak zase máme $[p] = \mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}}$. Nyní můžeme sestavit soustavu rovnic pro proměnné a, b, c a jednotky kg, m, s.

$$\begin{aligned} 1 &= -a + b\,,\\ -1 &= 3a + c\,,\\ -2 &= -2a\,. \end{aligned}$$

Soustavu řešíme od třetí rovnice a snadno dospějeme k hledanému vztahu (který můžeme také nahlédnout z vyjádření Pa jako $\mathrm{N\cdot m^{-2}}$)

$$p = \frac{GM^2}{R^4} \,.$$

Pro zadané hodnoty dostaneme číselný výsledek $p \approx 10^{12}\,\mathrm{Pa}$. Skutečný tlak v zemském jádru se pohybuje okolo $3{,}5\cdot10^{11}\,\mathrm{Pa}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha BG ... trefovaná

Tom umí házet pouze s elevačním úhlem $\alpha = 36^\circ$ (elevační úhel měříme od země) a chce trefit střed terče na stěně. Stěna je od Toma ve vzdálenosti $x = 14\,\mathrm{m}$. Při prvním pokusu hází s počáteční rychlostí $v_1 = 12{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a trefí se do stěny $\Delta y = 2{,}67\,\mathrm{m}$ nad střed terče. S jakou počáteční rychlostí musí házet, aby trefil střed terče? Tloušťku terče, rozměry házeného předmětu a odpor vzduchu zanedbejte.

Kiki a Tom půjdou na bowling.

Při šikmém vrhu pro vzdálenost ve směru osy x platí $x = v_x t$, pro čas vrhu t tedy platí $t = x/v_x$. Pro vzdálenost ve směru osy y platí vztah $y = v_y t - gt^2/2$, do kterého můžeme dosadit předcházející a dostaneme

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2v_x^2}x^2 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2\,,$$

kde jsme již vyjádřili složky rychlosti jako $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$. Víme, že vrh je ukončen stěnou ve výšce $y = y_0 + \Delta y$, kde y_0 je svislá vzdálenost středu terče od bodu, ze kterého Tom házel, a $\Delta y = 2{,}67\,\mathrm{m}$ je nadbytečná výška, o kterou střed terče nebyl trefen. Platí tedy

$$\Delta y + y_0 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_1^2\cos^2\alpha}\,.$$

Označíme-li si v_2 rychlost v případě, kdy je terč trefen, platí

$$y_0 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_2^2\cos^2\alpha}\,,$$

$$y_0 = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_1^2\cos^2\alpha} - \Delta y\,.$$

Po dosazení a úpravě výrazů dostáváme pro hledanou rychlost v_2 vztah

$$v_2 = xv_1\sqrt{\frac{g}{2\Delta y v_1^2\cos^2\alpha + gx^2}}\,.$$

Číselně tedy vychází, že aby Tom trefil terč, musí házet počáteční rychlostí zhruba $10{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha BH ... biopalivo

Enzym ureáza katalyzuje reakci močoviny s vodou

$$(NH_2)_2CO + H_2O \longrightarrow CO_2 + 2\,NH_3\,.$$

Vypočtěte objemovou práci spojenou s hydrolýzou 1 molu močoviny při teplotě $25\,^\circ\mathrm{C}$ *za konstantního tlaku. Předpokládejte, že produkty reakce jsou ideální plyny, které se zcela uvolňují z roztoku.* *Verča se vzdělávala v chemii.*

Celkové látkové množství plynu, které vznikne během reakce, je $\Delta n = 3\,\mathrm{mol}$. Objemovou práci spočteme jako

$$W = p\Delta V\,.$$

V našem případě si můžeme představit, že reakce probíhá v nádobě o počátečním objemu V uzavřené pohyblivým pístem, ve které je udržován konstantní tlak plynu p, teplota T. Počáteční látkové množství plynu je n. Plyny vzniklé hydrolýzou zvětší objem nádoby o ΔV a látkové množství plynu uvnitř se zvětší o Δn, přičemž bude na pístu vykonána práce W. Podle stavové rovnice ideálního plynu platí pro počáteční stav

$$pV = nRT$$

a pro koncový stav

$$p(V + \Delta V) = (n + \Delta n)RT\,.$$

Odečtením těchto rovnic získáme vyjádření vykonané práce

$$W = p\Delta V \; = \Delta nRT\,.$$

Dosadíme-li $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol{-}1}$ a $T = 298\,\mathrm{K}$, dostáváme výsledek $W = 7{,}43\,\mathrm{kJ}$.

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Úloha CA ... geosynchrotron

Synchrotrony mají oproti lineárním urychlovačům částic tu výhodu, že částice může obvodem zařízení proletět vícekrát a my máme možnost ji více urychlit. Na druhou stranu dochází při pohybu nabité částice po zakřivené dráze k vyzařování elektromagnetického záření. Výkon P tohoto tzv. synchrotronového záření je nepřímo úměrný čtverci poloměru křivosti R a přímo úměrný čtvrté mocnině energie relativistické částice E, tedy $P \propto E^4R^{-2}$.

Okruh urychlovače částic LHC má délku $l = 27\,\mathrm{km}$. Abychom snížili ztráty energie způsobované synchrotronovým zářením, vystavíme nový urychlovač, jehož okruh povede po obvodu Země, který má délku $l_\mathrm{E} = 40\,000\,\mathrm{km}$. Určete, o kolik procent poklesnou ztráty na jeden oběh, budeme-li v novém synchrotronu srážet stejný typ částice, ale s šestkrát vyšší energií než v LHC. V obou případech jsou částice relativistické, tzn. pohybují se přibližně rychlostí světla.

Mirek se smál devítipalcovému cyklotronu z let třicátých.

Pohybuje-li se relativistická částice po okruhu délky $l = 2\pi R$, bude ztráta energie za jeden oběh

$$\Delta E = P\frac{l}{c} \propto E^4R^{-1}\,.$$

V zadání máme dané délky obou okruhů, které jsou přímo úměrné jejich poloměrům, a také poměr energií urychlených částic. Zbývá tedy vyjádřit poměr

$$1 - \frac{\Delta E_\mathrm{E}}{\Delta E} = 1 - \frac{E_\mathrm{E}^4 l}{E^4 l_\mathrm{E}} \doteq 13\,\%\,.$$

Vidíme, že i když rozměry synchrotronu zvětšíme více než tisíckrát, dostaneme po šestinásobném zvýšení rychlosti téměř stejné ztráty zářením.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha CB ... přetržení houpačky

V zahradách hlavního města Fykosie je strom. Na stromě je zavěšena houpačka. Délka závěsu je $l = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Víme, že závěs se při působení síly větší než $F = 1{,}2\,\mathrm{kN}$ přetrhne. Jakou nejvyšší hmotnost může mít Fykosák, který by se chtěl na houpačce houpat s maximální výchylkou $\alpha_\mathrm{max} = 45^\circ$ vůči svislé poloze? Zanedbejte hmotnost závěsu.

Karel si říkal, jestli ho to unese...

Velikost radiální síly působící na závěs bude největší v okamžiku průchodu rovnovážnou polohou. Zde působí ve stejném směru odstředivá i tíhová síla. Celková síla je pak jejich skalárním součtem a při maximální hmotnosti Fykosáka bude rovna F, takže $F = F_{\mathrm{od}} + F_{\mathrm{g}}$. Tíhovou sílu můžeme jednoduše vyjádřit jako $F_{\mathrm{g}} = mg$, kde m je hmotnost Fykosáka a g je tíhové zrychlení. Odstředivou sílu můžeme vyjádřit v závislosti na rychlosti v jako $F_{\mathrm{od}} = mv^2/l$. Rychlost v rovnovážné poloze vypočítáme ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)mgl \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\left(1 - \cos\alpha_{\max}\right)gl\,.$$

Celková síla, která v rovnovážné poloze na závěs působí, bude

$$F = \frac{mv^2}{l} + mg = \left(3 - 2\cos\alpha_{\max}\right)mg\,.$$

Vyjádříme hledanou hmotnost

$$m = \frac{F}{g\left(3 - 2\cos\alpha_{\max}\right)} = \frac{F}{g\left(3 - \sqrt{2}\right)} \doteq 77\,\mathrm{kg}\,.$$

Maximální hmotnost Fykosáka, se kterým se při takovém houpání houpačka neutrhne, je 77 kg.

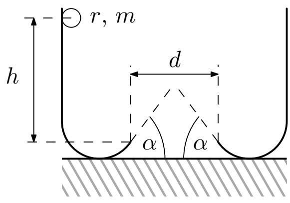
Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha CC ... kuličková dráha

Sestavíme si kuličkovou dráhu jako na obrázku. Homogenní kulička má hmotnost m a její poloměr r je zanedbatelný vůči vzdálenosti d a výšce h. Určete, jaká musí být hloubka h, aby kulička akorát přeskočila z konce jedné dráhy na druhou, pokud svírají konce drah s vodorovnou podložkou úhel $\alpha = 60^\circ$ a známe vzdálenost $d = 30\,\mathrm{cm}$. Kuličku pouštíme z klidu. Předpokládejte, že koeficient tření je hodně velký a kuličky tedy neprokluzují. Zanedbejte veškeré ztráty energie. *Podle Mirka brání realistická autíčka rozvoji dětské představivosti.*

Vyjdeme ze zákona zachování energie a položíme úbytek potenciální energie roven přírůstku energie kinetické, která se skládá ze složky translační a rotační

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh\,. \tag{1}$$



Obr. 3: Hop!

Moment setrvačnosti homogenní koule je $J = (2/5)mr^2$, mezi rychlostí kuličky a úhlovou rychlostí její rotace platí vztah $v = \omega r$. Po dosazení do (1) vyjádříme počáteční rychlost při opuštění konce dráhy

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}\,.$$

Z rovnic pro šikmý vrh odvodíme dolet kuličky

$$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}\,.$$

Nyní stačí zkombinovat vyjádření rychlosti a doletu a získáme hledaný vztah pro počáteční výšku

$$h = \frac{7}{10}\frac{d}{\sin 2\alpha}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde $h \doteq 24\,\mathrm{cm}$.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha CD ... simulace LHC

Filip si chtěl představit, jak vypadá srážka jádra tritia s protonem. Proto si sebral dvě kuličky s hmotností m a $3m$, urychlil je na (nerelativistické) rychlosti u a centrálně je proti sobě srazil. Jakou rychlostí se pohybovala po srážce lehčí z kuliček? Předpokládejte, že srážka byla dokonale pružná. *Paťo si stále představuje atomy jako kuličky.*

Ako to už pri pružných zrážkach býva, začneme zákonom zachovania energie a hybnosti. Ak označíme smer, v ktorom sa pohybovala ťažšia z guličiek, ako kladný, môžeme zákon zachovania hybnosti v tomto smere písať ako

$$3mu - mu = mv - 3mw \quad \Rightarrow \quad 2u = v - 3w\,,$$

kde v je hľadaná rýchlosť ľahšej guličky a w rýchlosť ťažšej guličky – priradenie znamienok pritom zodpovedá predpokladu, že sa po zrážke budú guličky pohybovať opačnými smery než pred ňou (keď sa bude ťažšia gulička pohybovať v pôvodnom smere, dostaneme zápornú hodnotu w). Zákon zachovania energie bude

$$\frac{1}{2}3mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}3mw^2 \quad \Rightarrow \quad 4u^2 = v^2 + 3w^2\,.$$

Z prvej rovnice si vieme vyjdariť $w = (v - 2u)/3$. Po dosadení do druhej rovnice a úprave dostávame

$$0 = v^2 - uv - 2u^2\,.$$

Túto rovnicu vieme vyriešiť tak, že v nej riešenie „uvidíme“, použijeme vzorec pre korene kvadratickej rovnice alebo trik:

$$0 = v^2 - uv - 2u^2 = v^2 + uv - 2uv - 2u^2 = v\left(v + u\right) - 2u\left(v + u\right) = \left(v + u\right)\left(v - 2u\right)\,.$$

Odtiaľ vidíme 2 riešenia: $v = -u$, ktoré odpovedá neinteragujúcim guličkám (ako keby guličky cez seba prešli) a fyzikálne riešenie $v = 2u$.

Patrik Švančara
`pato@fykos.cz`

Úloha CE ... proč se ta voda už nevaří?

Topná spirála varné konvice je pod napětím $U = 230\,\mathrm{V}$ a protéká jí proud $I = 0{,}5\,\mathrm{A}$. Necháme konvici běžet $\tau = 2\,\mathrm{min}$ a pak si všimneme, že jsme zapomněli napustit do konvice vodu. Nalijeme do ní tedy $V = 0{,}5\,\mathrm{l}$ vody a přitom ji omylem opět vypneme. Zajímá nás, na jakou teplotu se voda zahřeje, jestliže si topná spirála vyměňuje teplo pouze s hliníkovým dnem *konvice a dno předává teplo pouze vodě. Měrná tepelná kapacita vody je $c_\mathrm{v} = 4{,}2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, hustota vody $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ (teplotní závislost je slabá), měrná tepelná kapacita hliníku $c_{Al} = 0{,}90\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ a hmotnost hliníkového dna $m = 100\,\mathrm{g}$. Počáteční teplota hliníku i vody je $t_0 = 20\,\mathrm{^\circ C}$.* *Mirek se diví, proč ráno nikdy nestíhá vypít čaj.*

Za čas τ předá topná spirála dnu konvice teplo vzniklé Jouleovým ohřevem

$$Q = UI\tau\,.$$

Toto teplo je pak předáváno dolitému objemu vody, dokud se teploty dna a vody nevyrovnají. Obě tepelné výměny popíšeme rovnicemi

$$\begin{aligned} UI\tau &= m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}(t_\mathrm{Al} - t_0)\,,\\ m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}(t_1 - t_0) &= m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}(t_\mathrm{Al} - t_1)\,, \end{aligned}$$

kde jsme t_Al označili teplotu hliníku po ohřátí a t_1 teplotu vody a hliníku po ustálení tepelné rovnováhy. Z první rovnice vyjádříme

$$t_\mathrm{Al} = \frac{UI\tau}{m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}} + t_0\,,$$

z druhé rovnice

$$t_1 = \frac{m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}t_\mathrm{Al} + m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_0}{m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al} + m_\mathrm{v} + c_\mathrm{v}} = \frac{UI\tau}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}} + t_0 \doteq 26\,\mathrm{^\circ C}\,.$$

Díky své malé tepelné kapacitě má hliník zanedbatelný vliv, odebráním členu $m_\mathrm{Al}c_\mathrm{Al}$ ze jmenovatele bychom dostali pouze o dva stupně vyšší teplotu. Ve skutečnosti však takhle „zpětně“ vodu ohřát nemůžeme, protože předávání tepla do okolí bude při vyšších teplotách hliníkového dna velmi výrazné.

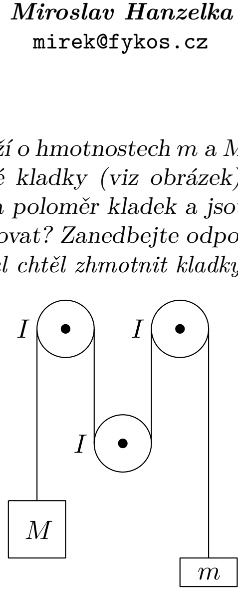
Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha CF ... rolling deep

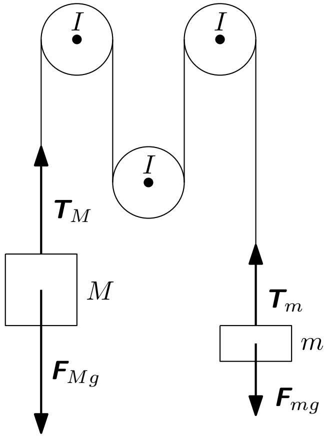
Máme soustavu tvořenou vláknem, na jehož koncích jsou upevněná závaží o hmotnostech m a M ($M > m$). Vlákno je převinuto přes tři stejné hmotné válcové pevné kladky (viz obrázek), z nichž každá má moment setrvačnosti $I = m_0r^2/2$ (známe hmotnost a poloměr kladek a jsou pro všechny kladky stejné). S jakým zrychlením se budou závaží pohybovat? Zanedbejte odpor prostředí. Na závaží působí tíhové zrychlení g. *Karel chtěl zhmotnit kladky.*

Schematicky jsme si zakreslili síly do obrázku 5. $\boldsymbol{T}_m$, $\boldsymbol{T}_M$ jsou tahové síly ve vláknech, $\boldsymbol{F}_{mg}$, $\boldsymbol{F}_{Mg}$ jsou tíhové síly. Vzhledem k tomu, že M je těžší závaží, tušíme, že se soustava závaží bude pohybovat tak, že M bude klesat. Proto zvolíme jako kladný směr v rovnicích právě směr klesání M. Nyní můžeme zapsat soustavu rovnic našeho problému

$$\begin{aligned} Ma &= F_{Mg} - T_M\\ -ma &= F_{mg} - T_m\\ (T_M - T_m)\,R &= 3I\varepsilon = 3I\frac{a}{R} \end{aligned}$$



Obr. 4: Soustava kladek.



Obr. 5: Silový rozbor úlohy.

Od první rovnice odečteme druhou, dosadíme do výsledku z rovnice třetí, vyjádříme moment setrvačnosti válce a vyřešením takto vzniklé rovnice s jednou neznámou a získáváme

$$(M+m)\,a = (M-m)\,g - (T_M - T_m) = (M-m)\,g - \frac{3Ia}{R^2} = (M-m)\,g - \frac{3}{2}m_0 a\,,$$

$$a = g\frac{M-m}{M+m+\frac{3}{2}m_0}\,.$$

Závaží se tedy budou pohybovat tak, že levé bude klesat a pravé stoupat se zrychlením

$$g\frac{M-m}{M+m+\frac{3}{2}m_0}\,.$$

Pokud vám dělá problém silový rozbor situace, ale zato máte základní znalosti teoretické mechaniky, můžete úlohu snadno vyřešit pomocí principu virtuální práce. Vyjdeme ze vztahu

$$F = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\,,$$

kde levá strana představuje sílu působící na závaží a pravá strana změnu energie systému při posunu jedné z kladek o délkový element $\mathrm{d}x$. Po rozepsání

$$(M+m)a = -\frac{-Mg\,\mathrm{d}x + mg\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}m_0 v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,.$$

Ve třetím členu zlomku provedeme úpravu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a\frac{1}{v}\,,$$

čímž získáme lineární rovnici v proměnné a, jejíž výsledek je samozřejmě identický s výsledkem výše.

Pokud máte hodně dobré znalosti teoretické mechaniky, můžete si taky napsat lagrangián úlohy.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha CG ... aproximace řeky Styx

Jakou rychlostí by stoupala bublina plná vody v rybníku ze rtuti? Zajímá nás pouze ustálený stav v klidném rybníce. Předpokládejme, že tvar vodní bubliny je kulový a součinitel odporu pro Newtonův zákon odporu kapaliny ($F_\mathrm{N} = C\varrho v^2 S/2$) je $C = 1/2$. Hustota vody je $\varrho_{\mathrm{H_2O}} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a rtuti $\varrho_\mathrm{Hg} = 13\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Poloměr vodní bubliny je $r = 0{,}9\,\mathrm{cm}$.

Karel je proti zákazu rtuti, která může být skvělou experimentální surovinou.

Síla F, daná jako rozdíl síly vztlakové a tíhové a působící na bublinu vody o objemu $V = 4\pi r^3/3$ bude

$$F = V\left(\varrho_\mathrm{Hg} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}\right) g = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\varrho_\mathrm{Hg} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}\right) g\,.$$

Tato síla se v ustáleném stavu vyrovná s odporovou silou. Průřez koule je $S = \pi r^2$. Můžeme tedy dát obě síly do rovnosti a vypočítat rychlost

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \left(\varrho_\mathrm{Hg} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}\right) g = \frac{1}{2} C \varrho_\mathrm{Hg} \pi r^2 v^2\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{rg\left(\varrho_\mathrm{Hg} - \varrho_{\mathrm{H_2O}}\right)}{C\varrho_\mathrm{Hg}}} \doteq 0{,}66\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Rychlost, jakou bude vodní bublina ve rtuti stoupat, bude $0{,}66\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Proč jsme mohli použít Newtonův vztah pro turbulentní proudění a nevyužívali jsme Stokesův vztah pro laminární proudění? Podívejme se na naši výslednou rychlost a určeme, jakému Reynoldsovu číslu bude odpovídat. Reynoldsovo číslo je definované jako

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}\,,$$

kde d je charakteristický rozměr úlohy a ν je kinematická viskozita. Ta je pro rtuť při pokojové teplotě $\nu = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$. V našem případě můžeme za charakteristický rozměr považovat průměr koule. Reynoldsovo číslo nám tedy vyjde $\mathrm{Re} \doteq 10^5$, což odpovídá turbulentnímu proudění.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha CH ... jednoduché fyzické kyvadlo

Jak každý dobrý fyzik ví, perioda malých kmitů fyzického kyvadla se dá vypočítat ze vztahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\,,$$

kde J je celkový moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení, m je jeho celková hmotnost a l je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. Určete, jaká bude perioda kmitu kyvadla tvořeného homogenní tyčí o délce $l_0 = 0{,}50\,\mathrm{m}$ s homogenní koulí o poloměru $r = l_0/4$ upevněnou na jejím jednom konci (střed koule je tedy ve vzdálenosti r od toho konce tyče). Kyvadlo kmitá kolem osy kolmé na tyč a procházející druhým koncem tyče. Hmotnost koule je dvojnásobkem hmotnosti tyče. Výsledek udejte na tři platné cifry.

Karel chtěl účastníkům FYKOSího Fyziklání přiblížit reálnější kyvadlo.

Nejprve určíme vzdálenost těžiště kyvadla vůči ose otáčení. „Tyčová“ část kyvadla má těžiště uprostřed své délky (v $l_0/2$) a má hmotnost $m/3$. Koule má těžiště $l_0 + r = 5l_0/4$ od osy otáčení a jeho hmotnost je $2m/3$. Polohu těžiště l určíme řešením rovnice, která popisuje rovnost momentů tíhových sil

$$mgl = \frac{m}{3}g\frac{l_0}{2} + \frac{2m}{3}g\frac{5l_0}{4} \quad\Rightarrow\quad l = l_0\,.$$

Dále potřebujeme určit celkový moment setrvačnosti. Pro jeho výpočet potřebujeme znát Steinerovu větu $J_d = J_0 + md^2$, kde J_0 je moment setrvačnosti tělesa hmotnosti m vůči ose procházející těžištěm a J je moment setrvačnosti kolem rovnoběžné osy posunuté o d od těžiště. Moment setrvačnosti homogenní tyče o hmotnosti $m/3$ a délky l_0 vůči těžišti je $ml_0^2/36$. Moment setrvačnosti plné homogenní koule o hmotnosti $2m/3$ a poloměru $r = l_0/4$ vůči těžišti je $ml_0^2/60$. Celkový moment setrvačnosti v našem případě je

$$J = \frac{1}{36}ml_0^2 + \frac{1}{3}m\left(\frac{1}{2}l_0\right)^2 + \frac{1}{60}ml_0^2 + \frac{2}{3}m\left(\frac{5}{4}l_0\right)^2 = \frac{421}{360}ml_0^2\,.$$

Získané hodnoty těžiště a momentu setrvačnosti pak již stačí dosadit do vzorce v zadání

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{421}{360}\frac{ml_0^2}{mgl_0}} = \pi\sqrt{\frac{421}{90}\frac{l_0}{g}} \doteq 1{,}53\,\mathrm{s}\,.$$

Perioda kmitu našeho fyzického kyvadla bude $1{,}53\,\mathrm{s}$, což je odpovědí na naši otázku. Pro zajímavost můžeme srovnat tuto periodu s periodou, která by odpovídala matematickému kyvadlu, které by mělo délku rovnou vzdálenosti těžiště koule od osy otáčení ($l_\mathrm{m} = 5l_0/4$)

$$T_\mathrm{m} = 2\pi\sqrt{\frac{5l_0}{4g}} \doteq 1{,}59\,\mathrm{s}\,.$$

Výsledky se od sebe liší o méně než 4 %, což znamená, že pokud bychom chtěli jenom rychlý odhad periody, pak nám úplně stačí šikovný odhad „efektivní délky kyvadla“.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha DA ... dohola

Kiki má 125 428 vlasů, které si jednoho dne nechá ostříhat tak, že všechny mají délku $22{,}80\,\mathrm{cm}$. Jaká bude průměrná délka jejího vlasu za rok poté, pokud jí rostou rychlostí $0{,}35\,\mathrm{mm{\cdot}den^{-1}}$ a každý den jí vypadne 100 vlasů (vždy takových, které mají zrovna největší délku) a začne jí růst 100 nových vlasů? Pro jednoduchost uvažujme, že v době ostříhání mají skutečně všechny vlasy uvedenou délku a žádné nejsou kratší. Rok má 365 dní. Výsledek uveďte s přesností na milimetry.

Kiki si zas máčela vlasy v polívce.

Za rok vypadne 36 500 vlasů, tedy méně než je jejich celkový počet, což nám úlohu zjednodušuje. Celkovou délku vlasů, které je nahradí, určíme pomocí součtu aritmetické řady jako

$$l_1 = \frac{365 \cdot 366 \cdot 100 \cdot 0{,}35}{2}\,\mathrm{mm} = 2\,337\,825\,\mathrm{mm}\,.$$

Určení součtu délky všech ostatních vlasů za rok je velmi jednoduché. Stačí si vypočítat délku jednoho vlasu po roce a vynásobit ji počtem nevypadlých vlasů

$$l_2 = (228 + 0{,}35 \cdot 365) \cdot 88\,928\,\mathrm{mm} = 31\,636\,136\,\mathrm{mm}\,.$$

Průměrnou délku vlasu získáme sečtením obou mezivýsledků a následným vydělením celkovým počtem vlasů. Průměrná délka vlasu za rok bude asi $\bar{l} \doteq 270{,}86\,\mathrm{mm} \doteq 271\,\mathrm{mm}$.

Při řešení úlohy jsme mlčky předpokládali, že každých sto vlasů vypadne vždy na začátku dne (přesně o půlnoci), proto jsme mohli započítat denní přírůst pro celou stovku nových vlasů. Je však pravděpodobnější, že vlasy budou vypadávat zhruba rovnoměrně během celého dne. Výsledná průměrná délka $\bar{l}'$ by proto měla být o něco nižší. Jako dolní odhad spočteme případ, kdy každých sto vlasů vypadne naopak na konci dne. Součet délek nových vlasů potom bude

$$l_1' = \frac{364 \cdot 365 \cdot 100 \cdot 0{,}35}{2}\,\mathrm{mm} = 2\,325\,050\,\mathrm{mm}\,.$$

Délka $l_2' = l_2$ zůstává, průměrná délka bude potom $\bar{l}' \doteq 270{,}76\,\mathrm{mm} \doteq 271\,\mathrm{mm}$. Vidíme, že v rámci požadované přesnosti dostaneme stejný výsledek.

Kristína Nešporová
`kiki@fykos.cz`

Úloha DB ... važme si váhy

Miska pružinových vah má hmotnost $m = 0{,}025\,\mathrm{kg}$ a tuhost pružiny je $k = 15{,}3\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Z výšky $h = 9\,\mathrm{cm}$ dopadne na misku závaží o hmotnosti $M = 50\,\mathrm{g}$. Náraz je dokonale nepružný. O jakou největší vzdálenost závaží poklesne? Vzdálenost odečítejte z bodu, ve kterém závaží dopadlo na misku. *Marek si vzpomněl na hodiny Fyziky v experimentech I.*

Závaží po volném pádu z výšky h dopadne na misku z výšky h rychlostí $v = \sqrt{2gh}$. Podle zákona zachování hybnosti se miska se závažím začnou pohybovat dolů rychlostí

$$w = \frac{M}{M+m} v = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \sqrt{2gh}\,.$$

Současně se změní rovnovážná poloha misky. Ta bude níže o

$$\Delta x = \frac{Mg}{k}\,.$$

Rychlost misky se závažím se bude zvyšovat, než se dostane do rovnovážné polohy. Pak se naopak začne snižovat, až se v jednom místě, jehož polohu chceme znát, kinetická energie přemění na potenciální energii pružnosti. Jelikož se pružinové váhy chovají jako harmonický oscilátor, bude mít miska se závažím v dané vzdálenosti od rovnovážné polohy vždy stejnou velikost rychlosti. Měla-li rychlost w ve vzdálenosti Δx nad rovnovážnou polohou, bude ji mít i Δx pod ní. Maximální výchylku x z nové rovnovážné polohy pak získáme z rovnosti kinetické energie a potenciální energie pružnosti

$$\frac{1}{2}(m+M)w^2 = \frac{1}{2}k\left[x^2 - (\Delta x)^2\right] ,$$

kde jsme na pravé straně nezapomněli na skutečnost, že v bodě, kde má miska se závažím rychlost w, je již z rovnovážné polohy vychýlena o Δx. Řešením této rovnice je

$$x = \sqrt{\frac{(m+M)w^2}{k} + (\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{2M^2gh}{k(M+m)} + \frac{M^2g^2}{k^2}} .$$

V zadání se však ptáme na protažení H měřené z počáteční rovnovážné polohy, proto k x ještě přičteme Δx. Finální výsledek je potom

$$H = \Delta x + x = \frac{Mg}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{g(M+m)}}\right] .$$

Miska se z původní rovnovážné polohy vychýlí nejvíce o $H = 10{,}1\,\mathrm{cm}$.

Marek Martaus
martaus@fykos.cz

Úloha DC ... v jednotě je síla

Na vesmírné stanici uniklo z nedovřené lahve n stejně velkých kulových kapiček vody o poloměru r_m, z nichž každá nesla náboj o velikosti Q. Postupem času se všechny spojily v jednu velkou kapku. Určete poměr plošné hustoty náboje na velké kapce a na jedné z původních kapek a dále poměr elektrostatických sil, kterými působí velká kapka, resp. malá kapka na referenční náboj q v referenční vzdálenosti $l \gg r_\mathrm{m}$. Předpokládejte, že náboj se nalézá pouze na povrchu kapek a n je malé přirozené číslo. Poměry vyjadřujte vždy jako veličina příslušející velké kapce dělená veličinou příslušející malé kapce. *I felt a great disturbance in the Force... (Mirek)*

Každá z původních kapek má poloměr r_m a objem V_m, nová kapka má objem $V_\mathrm{v} = nV_\mathrm{m}$. Objem je úměrný třetí mocnině poloměru, takže poloměr nové kapky r_v bude úměrný $\sqrt[3]{n}$. Plošná hustota náboje je definovaná jako náboj dělený obsahem plochy, na které je náboj rozprostřen. Jestliže $r_\mathrm{v} \propto \sqrt[3]{n}$, pak pro obsah velké kapky platí $S_\mathrm{v} \propto n^{2/3}$, z čehož už pro poměr plošných hustot plyne

$$\frac{\sigma_\mathrm{v}}{\sigma_\mathrm{m}} = \frac{S_\mathrm{m}}{S_\mathrm{v}}\frac{nQ}{Q} = n^{-2/3} \cdot n = n^{1/3} .$$

Jelikož je kapka mnohem menší než referenční vzdálenost náboje q, můžeme ji aproximovat bodovým nábojem a elektrostatickou sílu spočíst jako

$$F = k\frac{qQ}{l^2} ,$$

kde k je konstanta. Pro poměr sil potom máme

$$\frac{F_\mathrm{v}}{F_\mathrm{m}} = \frac{nQ}{Q} = n .$$

Síla zřejmě roste s počtem fúzujících kapek rychleji než plošná hustota.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha DD ... pružná

Ve výšce h nad velkou, vodorovnou, hladkou podložkou je upevněné nehmotné pevné lano délky L a na jeho konci je bod s hmotností m. Lano vodorovně napneme a pustíme. Do jaké výšky hmotný bod poprvé vyskočí, pokud se lano při dopadu bodu na podložku od bodu odpojí? Předpokládejte, že srážky s podložkou jsou dokonale pružné a platí $L > h$.

Xellosovi se líbí, jak stačí trochu změnit zadání a dostaneme úplně jinou úlohu.

Hmotný bod najprv bude padať po kružnici s tiažovým zrýchlením g, pričom sa zachováva jeho mechanická energia a rýchlosť je vždy kolmá na lano. Tesne pred dopadom bude teda vektor rýchlosti zvierať s podložkou uhol

$$\alpha = \arccos \frac{h}{L}$$

a veľkosť jeho rýchlosti bude

$$v_0 = \sqrt{2hg}\,.$$

Pri odraze sa zmení znamienko zvislej zložky rýchlosti a hmotný bod sa začne pohybovať šikmým vrhom. Pri ňom vyskočí

$$h_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = h\frac{L^2 - h^2}{L^2}\,.$$

Napriek tomu, že sa mechanická energia zachováva, výsledok nie je h.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha DE ... chytré housenky

Jistý druh housenek v Amazonském pralese se pohybuje tak, že hejno housenek vytvoří dvě patra, přičemž housenky v horním patře chodí po zádech housenek z dolního patra, v čele se přesunou do spodního patra a vzadu zase do horního. Tím se zvýší jejich průměrná rychlost. Vypočtěte, jakou průměrnou rychlostí se housenky pohybují, když utvoří deset pater. Rychlost jedné housenky je $v_1 = 0{,}5\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Předpokládejte, že ve všech patrech je řada stejně dlouhá.

Viktor sleduje SmarterEveryDay.

V tomto prípade je priemerná rýchlosť húsenice súčet rýchlostí (voči zemi) všetkých húseníc delený ich počtom, resp. pre rovnaký počet húseníc vo všetkých poschodiach súčet rýchlostí všetkých poschodí delený ich počtom.

Rýchlosť i-teho poschodia voči $(i-1)$-vému je vždy v_1, voči zemi je teda $v_i = iv_1$. Ak máme n poschodí, ľahko vypočítame aritmetický priemer

$$v_\mathrm{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{1}{n} v_1 \sum_{i=1}^{n} i = \frac{v_1 n(n+1)}{2n} = \frac{v_1(n+1)}{2}\,,$$

pre $n = 10$ dostávame $v_\mathrm{p} = 5{,}5 v_1 = 2{,}75\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

Viktor Skoupý
skoupy@fykos.cz

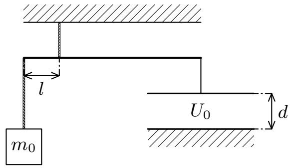
Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha DF ... elektropřezmen

Na kratším konci přezmenu (ve vzdálenosti l od osy otáčení) je závažíčko o hmotnosti m_0. Na delším konci je deska kondenzátoru o ploše S a pod ní je rovnoběžně druhá deska o stejné ploše ve vzdálenosti d. Nejprve je mezi deskami kondenzátoru napětí U_0 a soustava je v rovnováze. Pak závažíčko na kratším konci vyměníme za závaží o hmotnosti m a nastavíme napětí na kondenzátoru U tak, aby soustava byla opět v rovnováze. Vyjádřete hmotnost m z parametrů v zadání. Kondenzátory považujte za ideální. *Michal byl na vážkách.*

Ze zadání můžeme snadno vypočítat kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}\,,$$



Obr. 6: Elektropřezmen

kterou využijeme při výpočtu náboje na desce, tedy

$$Q = CU = \frac{\varepsilon S}{d}U\,.$$

Intenzity pole první desky a druhé budou stejně velké a dokonce stejně orientované. Proto můžeme spočíst přitažlivou sílu působící na horní desku

$$F_\mathrm{k} = \frac{E}{2}Q = \frac{U}{2d}\frac{\varepsilon S}{d}U = \frac{\varepsilon S U^2}{2d^2}\,.$$

Aby byl přezmen v rovnováze, musí být vektorový součet momentů sil od závaží a kondenzátoru nulový. Podmínku rovnováhy můžeme tedy přepsat do rovnice

$$mgl = l_\mathrm{k}\frac{\varepsilon S U^2}{2d^2}\,,$$

kde l_k je délka ramena při kondenzátoru.

Dostali jsme rovnici o dvou neznámých m a l_k. Ovšem máme dvě situace pro napětí U, m a U_0, m_0. Můžeme proto rovnici s m, U dělit rovnicí s m_0, U_0 a přímočaře získáme výsledek

$$m = m_0\frac{U^2}{U_0^2}\,.$$

Hledaná hmotnost m nového závaží je tedy přímo úměrná hmotnosti m_0 původního závaží a druhé mocnině poměru nového a původního napětí U/U_0.

Ivo Vinklárek
ivo@fykos.cz

Úloha DG ... podivná impedance

Máme dva jednoduché obvody tvořené dvěma sériově zapojenými součástkami. V obvodu A je zapojen kondenzátor s kapacitou C a cívka s indukčností $2L$. V obvodu B je zapojen kondenzátor s kapacitou $2C$ a cívka s indukčností L. Jaký bude poměr impedancí těchto obvodů $\kappa = Z_\mathrm{A}/Z_\mathrm{B}$ v závislosti na úhlové frekvenci ω, C a L? Uvažujme, že všechny odpory v obvodu jsou zanedbatelné. *Karel si pohrával s myšlenou strčit Luboškovy prsty do zásuvky.*

Úloha byla definována tak, aby vám stačila znalost impedance sériového RLC obvodu a nemuseli jste řešit obvod např. pomocí komplexní symboliky. Vztah pro impedanci jednoduchého sériově zapojeného obvodu RLC (s odporem R, indukčností L a kapacitou C) známe z tabulek,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} .$$

Zapišme si impedance pro obvod A i B (pro $R = 0$)

$$Z_\mathrm{A} = \left|2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| ,$$
$$Z_\mathrm{B} = \left|\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right| .$$

Zajímá nás poměr impedancí κ, který upravujeme na co nejjednodušší tvar

$$\kappa = \frac{Z_\mathrm{A}}{Z_\mathrm{B}} = \frac{\left|2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|}{\left|\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right|} = \frac{\frac{|2\omega LC - 1|}{\omega C}}{\frac{|2\omega LC - 1|}{2\omega C}} = 2 .$$

Hledaný poměr se, možná pro někoho překvapivě, zjednodušil na $\kappa = 2$, což je pouze konstanta a nezávisí tedy vůbec na ω, L ani C.

Pokud byste ovšem chtěli řešit úlohu pomocí komplexní symboliky, jediný rozdíl by byl

$$\hat{Z}_\mathrm{A} = \mathrm{i}\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) ,$$
$$\hat{Z}_\mathrm{B} = \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right) ,$$

což vede na stejný výsledek.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha DH ... nepružná

Ve výšce h nad velkou, vodorovnou, dokonale hladkou podložkou je upevněné nehmotné, pevné, nepružné lano délky L a na jeho konci je bod s hmotností m. Lano vodorovně napneme a pustíme. V jaké výšce se hmotný bod poprvé zastaví? Předpokládejte, že srážky s podložkou jsou dokonale nepružné. Předpokládejte, že $h < L$.

Xellosovi se líbí, jak stačí trochu změnit zadání a dostaneme úplně jinou úlohu.

Hmotný bod najprv bude padať po kružnici s tiažovým zrýchlením g, pričom sa zachováva jeho mechanická energia a rýchlosť je vždy kolmá na lano. Tesne pred dopadom bude teda vektor rýchlosti zvierať s podložkou uhol

$$\alpha = \arccos \frac{h}{L}$$

a veľkosť jeho rýchlosti bude

$$v_0 = \sqrt{2hg} .$$

Pri dopade sa stratí zložka rýchlosti kolmá na podložku a hmotný bod sa začne šmýkať rýchlosťou $v_x = v_0 \cos\alpha$. Stále je ale upevnený na lane, ktoré sa eventuálne napne a hmotný bod odletí od podložky. Pri tom sa stratí zložka rýchlosti kolmá na lano. Keďže napnuté lano zviera s podložkou zase uhol α, zložka rýchlosti kolmá na lano je $v_\mathrm{k} = v_x \cos\alpha$. Dostávame sa k rovnakému pohybu ako na začiatku, zo zachovania mechanickej energie teda plynie vyjadrenie výšky h_1, v ktorej je kinetická energia hmotného bodu opäť nulová:

$$\sqrt{2h_1 g} = v_\mathrm{k} = v_x \cos\alpha = v_0 \cos^2\alpha = \sqrt{2hg}\cos^2\alpha \quad \Rightarrow \quad h_1 = h\cos^4\alpha = \frac{h^5}{L^4}\,.$$

Vysoká mocnina je len dôsledkom toho, že sa kinetická energia niekoľkokrát stráca.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha EA ... a přece se točí konečným momentem hybnosti

Máme osu o a tuhé těleso, které se skládá ze spočetně mnoho (nekonečně mnoho takových, že jim lze přiřadit všechna přirozená čísla) hmotných bodů. Vzdálenost každého bodu od osy o je r a hmotnost i-tého bodu je $m_i = m_{i-1}/2$ pro $i \geq 2$. První bod má hmotnost $m_1 = m$. Vypočítejte moment setrvačnosti tuhého tělesa vůči ose o. *Ondra roztáčel maxisetrvačník.*

Moment setrvačnosti celého tělesa získáme součtem momentů setrvačnosti jednotlivých hmotných bodů. Příspěvek od i-tého bodu je

$$J_i = r^2 m_i = r^2 \frac{m}{2^{i-1}} = r^2 m 2^{1-i}\,.$$

Tyto příspěvky tvoří nekonečnou posloupnost a jejím součtem získáme

$$J = \sum_{i=1}^{+\infty} J_i = r^2 m \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{1-i} = r^2 m \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2r^2 m\,.$$

Při výpočtu jsme využili znalost geometrické řady $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = 1/(1-q)$ pro $|q| < 1$, zde konkrétně $q = 1/2$.

Ondřej Zelenka
`zelenka@fykos.cz`

Úloha EB ... ve stínu Coulomba

Stíněný Coulombův potenciál bodového náboje Q můžeme popsat vztahem

$$\varphi_\mathrm{s}(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{e}^{-r/\lambda}\,,$$

kde λ je stínící délka. Nalezněte vzdálenost r, pro kterou bude velikost stíněného potenciálu o polovinu menší než velikost nestíněného Coulombova potenciálu $\varphi(r)$.
Mirek pozoroval hru stínů.

Coulombův potenciál ve vzdálenosti r od bodového náboje Q je

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Je proto zřejmé, že stíněný a nestíněný potenciál jsou vždy v poměru

$$\frac{\varphi_s}{\varphi} = e^{-r/\lambda} .$$

Hledáme vzdálenost r, pro kterou platí $e^{-r/\lambda} = 1/2$. Logaritmováním obou stran rovnice snadno dospějeme k výsledku $r = \lambda \ln 2$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha EC ... ekvidistantní drátěnka

V prostoru máme $N \geq 2$ bodů (uzlů), které jsou každý s každým spojeny vodiči o odporu R (všechny vodiče mají stejný odpor). Jaký bude celkový odpor tohoto útvaru mezi libovolnými dvěma uzly?

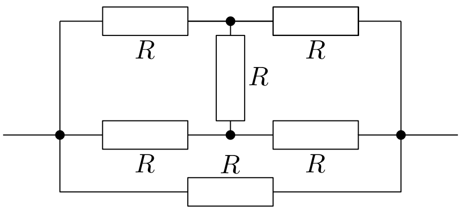
Nápověda pro lepší představivost: Pro $N = 2$ je odpor hledaného útvaru odpor jednoho drátu (úsečka). Pro $N = 3$ si můžete představit, že počítáte odpor mezi dvěma vrcholy drátěného trojúhelníku. Pro $N = 4$ si můžete představit drátěný čtyřstěn.

Karla zajímal odpor „4-D čtyřstěnu“ (nebo bychom to mohli nazvat „pěti-čtyřstěnu“, pokud bychom čtyřstěn nazvali „čtyř-trojúhelník“).

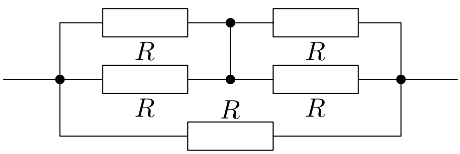
Nejprve si vypočtěme odpory, jak nám navrhuje nápověda. Odpor pro $N = 2$ je přímo $R_2 = R$. Pro $N = 3$ máme zapojeny dva vodiče sériově s jedním vodičem paralelně. Celkový odpor tedy je

$$R_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2}{3} R .$$

Zatím to bylo velice jednoduché, teď se podívejme na příklad drátěného čtyřstěnu. Obvod si



Obr. 7: K výpočtu odporu čtyřstěnu.



Obr. 8: K výpočtu toho samého odporu čtyřstěnu.

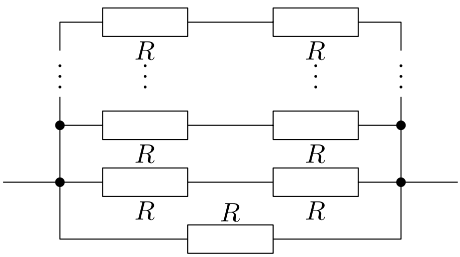
můžeme schematicky zaznamenat jako na obr. 7, kde jsou odpory vodičů schematicky znázorněné jako rezistory a vodiče ve schematu již odpor nemají. Je důležité uvědomit si symetrii úlohy, což nám usnadní její řešení. Mohli bychom sice nyní aplikovat Kirchhoffovy zákony, ale bylo by to velice pracné. Pokud si všimneme, že v obou uzlech, mezi kterými je prostřední odpor, je stejný potenciál, tedy mezi nimi nepoteče proud, můžeme tento odpor úplně odstranit či ve schématu nahradit vodičem, viz obr. 8. Odpor drátěného čtyřstěnu pak už jednoduše spočítáme jako

$$R_4 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{R}{2}\,.$$

Nyní nám už může být víceméně jasné, že mezi dvěma sousedními body útvaru, který bude mít N vrcholů, bude v našem schematu vždy jeden drát s odporem R a pak $N-2$ „dvojdrátů“, tedy zapojení s odporem $2R$, viz obr. 9. Důvodem je, že $N-2$ vrcholů je v útvaru zapojených stejně, proto jsou jejich potenciály stejné a dráty mezi nimi můžeme odstranit; zbylé dráty jsou právě v útvaru na obr. 9. Celkový odpor pro obecné N bude

$$R_N = \left[\frac{1}{R} + (N-2)\,\frac{1}{2R}\right]^{-1} = \frac{2}{N}R\,.$$

Hledaný odpor N vrcholového drátěného útvaru tedy je $2R/N$.



Obr. 9: K výpočtu odporu obecného útvaru.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha ED ... kolo štěstí či experiment ve vyučovací hodině

Uvažujme, že máme opravdu velice hodně nešikovného učitele fyziky a velice komplikovaný fyzikální experiment. Pokud by učitel měl šanci, že mu experiment vyjde v jednom z 8 000 pokusů, kolikrát minimálně by musel experiment zopakovat, aby byla šance, že mu alespoň jeden z pokusů vyjde alespoň 50 %? *Karel točil kolem štěstí a říkal si, jestli to má smysl.*

Pravděpodobnost, že jeden pokus vyjde a experiment se zdaří, označme $p = 1/8\,000$. Pravděpodobnost, že experiment se při jednom pokusu nezdaří, je tedy $q = 1 - p = 7\,999/8\,000$. Jednodušší než přímo počítat pravděpodobnost, že se alespoň jeden pokus zdaří, je vypočítat pravděpodobnost, že nevyjde žádný z pokusů. Při k pokusech je tato pravděpodobnost q^k. Tato by tedy měla být menší než 50 %, tj. 0,5. Vyřešíme tedy jednoduchou rovnici zlogaritmováním

$$q^k \leq 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad k \ln q \leq \ln 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln q} \doteq 5\,544{,}8 \doteq 5\,600\,.$$

Pro $p \ll 1$ můžeme využít taky přibližného vztahu $\ln q = \ln(1-p) \approx -p$ a upravit získanou nerovnost na

$$k \geq -\frac{\ln 0{,}5}{p} = \frac{\ln 2}{p} \doteq 5\,600\,.$$

Určili jsme, že by takto nešikovný učitel musel opakovat pokus alespoň 5 545krát, aby měl alespoň 50% pravděpodobnost úspěšného experimentu. To by tedy odpověděl matematik. Ve skutečnosti v zadání není zcela jasný počet zadaných platných cifer, proto fyzikálně správnější odpověď je 5 600.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha EE ... kdo nedriftuje s námi...

Jedním z častých fyzikálních omylů je představa, že když se elektrický signál v kabelech šíří rychlostí srovnatelnou s rychlostmi světla, šíří se touto rychlostí také nosiče náboje. Mějme roztok kuchyňské soli (NaCl) v trubici o poloměru $r = 10\,\mathrm{mm}$ a nechme jím protékat proud $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$. Koncentrace kationtů Na^+ i aniontů Cl^- je stejná, $n_+ = n_- = n = 6{,}0 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$. Určete, jakou driftovou rychlostí se jednotlivé částice budou pohybovat, jestliže jejich velikost rychlosti je nepřímo úměrná poloměrům částic, které jsou $r_+ = 90\,\mathrm{pm}$ a $r_- = 150\,\mathrm{pm}$. Předpokládejte přitom, že proudová hustota je v celém průřezu trubice stejná. Elementární náboj je $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Mirek byl smutný, že při elektrolýze nemůže pozorovat Čerenkovovo záření.

Proud definujeme jako elektrický náboj, který projde průřezem vodiče za jednotku času, tedy

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,.$$

Nábojový element ΔQ nacházející se v objemu $S\Delta l$ ($\Delta \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{S}$) vyjádříme pomocí objemové hustoty náboje ne jako

$$\Delta Q = neS\Delta l\,.$$

Zavedeme-li nyní proudovou hustotu ι jako proud dělený průřezem vodiče, dostaneme

$$\iota = \frac{neS}{S}\frac{\Delta l}{\Delta t} = nev\,,$$

kde jsme označili v rychlost iontů, které se pohybují kolmo na průřez trubice. Náboj sodíkových iontů je $+e$ a rychlost v_+, náboj aniontů chloru $-e$ a jejich rychlost $v_- = -v_+$. Sečtením těchto příspěvků dostaneme celkovou proudovou hustotu

$$\iota_{\mathrm{tot}} = ne\left(v_- + v_+\right)\,.$$

Ze vztahu $I = \iota S = \pi r^2 \iota$ získáme

$$I = \pi r^2 ne\left(v_+ + v_-\right)\,.$$

Přidáme-li k tomuto vztahu navíc znalost závislosti rychlosti iontu na jeho poloměru

$$\frac{v_+}{v_-} = \frac{r_+}{r_-}\,,$$

jsme již schopni vyjádřit jednotlivé rychlosti

$$v_- = \frac{I}{\pi r^2 ne\left(\frac{r_-}{r_+} + 1\right)} \doteq 0{,}12\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,,$$
$$v_+ = \frac{I}{\pi r^2 ne\left(\frac{r_+}{r_-} + 1\right)} \doteq 0{,}21\,\mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Vidíme, že ionty se pohybují *výrazně* pomaleji než světlo ve vakuu.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha EF ... tři holubi

V jednom bodě na tramvajové koleji postávají tři holubi (označme je A, B, C*) a zdánlivě si vůbec nevšímají blížícího se vagónu. Ve chvíli, kdy se srážka zdá být nevyhnutelnou, všichni tři naráz prudce vzlétnou. Každý z nich letí rovnoměrně přímočaře, ale v jiném směru a jinou rychlostí. Holub* A *má rychlost* v_A*, zbylí dva mají rychlosti* $v_\mathsf{B} = v_\mathsf{C} = 2v_\mathsf{A}$*. Přímky, po kterých holubi letí, mezi sebou svírají úhly* α *(holubi* A, B*),* β *(*B, C*) a* γ *(*C, A*). Určete obsah trojúhelníku* ABC *v čase* t*. Řešte pro* $v_\mathsf{A} = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*,* $\alpha = 30^\circ$*,* $\beta = 90^\circ$*,* $\gamma = 90^\circ$ *a* $t = 1\,\mathrm{s}$*.* *Mirek viděl lítat peří.*

Pro popis zvolíme kartézskou soustavu xyz, vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathsf{A}$ položíme do osy x a vektor $\boldsymbol{v}_\mathsf{B}$ do roviny xy. Vektor $\boldsymbol{v}_\mathsf{C}$ potom leží v ose z (na orientaci nezáleží). V takovéto soustavě pak snadno nalezneme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ určující polohu holubů v čase t

$$\boldsymbol{a} = v_\mathsf{A} t(1,0,0)\,,$$
$$\boldsymbol{b} = 2v_\mathsf{A} t(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)\,,$$
$$\boldsymbol{c} = 2v_\mathsf{A} t(0,0,1)\,.$$

Obsah S trojúhelníku ABC potom určíme pomocí vektorového součinu jako

$$S = \frac{1}{2}\left|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\right|\,.$$

Uvedené rozdíly vektorů a jejich vektorový součin jsou

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = v_\mathsf{A} t(2\cos\alpha - 1, 2\sin\alpha, 0)\,,$$
$$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = v_\mathsf{A} t(-1, 0, 2)\,,$$
$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 2v_\mathsf{A}^2 t^2(2\sin\alpha, 1 - 2\cos\alpha, \sin\alpha)\,.$$

Po vypočtení velikosti vektoru vzniklého vektorovým součinem a číselném dosazení nalezneme obsah trojúhelníku $S \doteq 33\,\mathrm{m^2}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha EG ... toliko fotonů...

Kolik fotonů je uvolněno z povrchu Slunce v průběhu jedné minuty? Pro jednoduchost odhadu předpokládejte, že jsou ze Slunce uvolňovány fotony s vlnovou délkou $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$. Znáte solární konstantu (či solární iradiaci) $K = 1\,370\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ na povrchu Země a střední vzdálenost Země od středu Slunce, která je $a = 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$. *Karel si říkal, jestli se jít o slunovratu opalovat.*

Nejprve si uvědomíme, co vlastně solární konstanta je. Ve skutečnosti se nejedná o žádnou konstantu, protože by se mělo jednat o výkon slunečního záření, které dopadá na jednotkovou plochu s normálou směřující ke Slunci ve vzdálenosti Země od Slunce. Nicméně tato proměnlivá veličina má dlouhodobou střední hodnotu[1] pohybující se kolem té uvedené v zadání. Celkový zářivý výkon Slunce P získáme tedy vynásobením plochy povrchu koule o poloměru a solární konstantou

$$P = 4\pi a^2 K \doteq 3{,}87 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}\,.$$

Tento výkon je stejný, jako je jeho hodnota na povrchu Slunce, protože mezi Sluncem a Zemí není prakticky žádná látka, která by tuto hodnotu ovlivnila.

Energie, kterou vyzáří Slunce za čas $t = 60\,\mathrm{s}$, je

$$E = Pt = 4\pi a^2 tK \doteq 2{,}32 \cdot 10^{28}\,\mathrm{J}\,.$$

Energie jednoho fotonu je kvantována a je dána vztahem

$$E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} \doteq 3{,}61 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}\,,$$

kde $h = 6{,}63{\cdot}10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ je Planckova konstanta, f je frekvence fotonu, $c = 3{,}00{\cdot}10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ rychlost světla ve vakuu a λ zadaná vlnová délka fotonu.

Počet fotonů N pak vypočítáme jednoduše z poměru energií, pokud uvažujeme, že Slunce září pouze na jedné vlnové délce.

$$N = \frac{E}{E_1} = \frac{4\pi\lambda a^2 tK}{hc} \approx 6{,}4 \cdot 10^{46}\,.$$

Za uvedených zjednodušujících předpokladů Slunce za jednu minutu vyzáří $6{,}4 \cdot 10^{46}$ fotonů.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha EH ... zlá lampa

Tuhnutí některých lepidel, pryskyřic a gelů lze urychlit zářením z UV lampy. Jak ale víme, UV záření je pro člověka škodlivé, proto raději nahradíme UV zářič gama zářičem, a sice kobaltem $^{60}\mathrm{Co}$. Nechť je v gama lampě 1 mol kobaltu $^{60}\mathrm{Co}$ a každou sekundu dodáme (vytvoříme srážkou neutronu s $^{59}\mathrm{Co}$) 10^{15} částic tohoto prvku. Poločas rozpadu radioaktivního kobaltu je $T = 1\,900\,\mathrm{d}$. Na jaké hodnotě se ustálí počet částic $^{60}\mathrm{Co}$ v lampě?

Mirek četl o gelové modeláži nehtů (samozřejmě kvůli těm UV lampám).

[1] Kromě ročních výkyvů způsobených pohybem Země, kvůli kterým se do definice přidává, že jde právě o střední vzdálenost Země–Slunce, tak samotné Slunce nezáří do všech směrů konstantně a homogenně. Výkyvy jsou způsobeny změnami ve sluneční aktivitě, které mají jedenáctileté a další, delší cykly.

Podle zákona radioaktivního rozpadu je úbytek částic $-\Delta N$ za malý časový úsek Δt (mnohem menší než poločas rozpadu) přímo úměrný počtu částic N v daném čase t a rozpadové konstantě λ. Pokud bychom nedodávali žádné atomy kobaltu, formulovali bychom rovnici

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N\,.$$

Jestliže však kontinuálně částice dodáváme rychlostí $\nu = 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, musíme na pravé straně rovnice tento člen přičíst, tedy

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N + \nu\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že hledáme ustálený stav, tedy $\Delta N = 0$. Pak ovšem

$$N_{\mathrm{eq}} = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu T}{\ln 2} \doteq 2{,}4 \cdot 10^{23} \doteq 0{,}39\,\mathrm{mol}\,,$$

kde jsme využili vztah $\lambda = \ln 2/T$ a pro převedení na moly výsledek dělili Avogadrovou konstantou $N_{\mathrm{A}} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Pokud přejdeme k infinitezimálním rozdílům $\mathrm{d}N$ a $\mathrm{d}t$, dostáváme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + \nu\,.$$

Kdybychom chtěli tuto diferenciální rovnici řešit (ať už proto, že si neuvědomíme význam pojmu ustálený stav, nebo proto, že si nepamatujeme převod mezi λ a T), nebyl by postup nijak složitý. Rovnice je separovatelná, integrujeme

$$\int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N}{\lambda N - \nu} = -\int_0^t \mathrm{d}t\,.$$

Pravá strana je triviální, nalevo stačí použít lineární substituci $z = \lambda N - \nu$. Dostaneme

$$\ln \frac{\lambda N - \nu}{\lambda N_0 - \nu} = -\lambda t\,,$$

po převedení do exponenciálního tvaru už snadno vyjádříme

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} + \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) \frac{\nu}{\lambda}\,.$$

Zapomeneme-li na druhý člen, máme obyčejný radioaktivní rozpad, kde dosazením $N(T) = N_0/2$ ihned dostaneme $\lambda = \ln 2/T$. Ustálený stav nalezneme jako limitu celého výrazu

$$\lim_{t \to +\infty} N = 0 + (1 - 0)\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{\lambda}\,.$$

Zároveň jsme tak ukázali, že ustálený stav skutečně existuje.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FA ... nepředbíhat!

Na mřížce se vzdáleností štěrbin $a = 10\,\mu\mathrm{m}$ pozorujeme difrakci modrého světla $\lambda_\mathrm{b} = 480\,\mathrm{nm}$ a žlutého světla $\lambda_\mathrm{y} = 580\,\mathrm{nm}$. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které nastane, že n-tý řád difrakce modrého světla bude blíže k ose stínítka než $n-1$ řád difrakce žlutého světla.

Mirka zase ve frontě u autobusu všichni předběhli.

Vyjdeme z mřížkové rovnice

$$a\sin\varphi = n\lambda\,,$$

v níž φ označuje difrakční úhel. Pro n-tý řád modrého světla, resp. $n-1$ řád žlutého světla máme rovnice

$$a\sin\varphi_\mathrm{b} = n\lambda_\mathrm{b}\,,$$
$$a\sin\varphi_\mathrm{y} = (n-1)\lambda_\mathrm{y}$$

a požadujeme

$$\varphi_\mathrm{b} < \varphi_\mathrm{y}\,,$$

neboli

$$\frac{n\lambda_\mathrm{b}}{a} < \frac{(n-1)\lambda_\mathrm{y}}{a} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\lambda_\mathrm{y}}{\lambda_\mathrm{y}-\lambda_\mathrm{b}}\,,$$

kde jsme využili skutečnosti, že sin je na intervalu $(0,\pi/2)$ (ve kterém leží úhly $\varphi_\mathrm{b}, \varphi_\mathrm{y}$) rostoucí funkce. Číselně vyjde $n > 5{,}8$, takže $n = 6$. Pro úplnost ještě ověříme, že se pátý řád difrakce žlutého světla na stínítko skutečně zobrazí.

$$\sin\varphi_\mathrm{y} = \frac{5\lambda_\mathrm{y}}{a} \doteq 0{,}29 < 1\,.$$

Výše uvedený výsledek je tedy správný.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha FB ... svažitá řeka

V severní části Bangladéše má tok Brahmaputry severojižní směr. V nejširším místě je vzdálenost mezi břehy $d = 22\,\mathrm{km}$; této oblasti odpovídá severní zeměpisná šířka $\varphi = 25^\circ$. I při zvýšeném průtoku je tok řeky velmi pomalý, při povodních dosahuje rychlosti $v = 0{,}5\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Pro dané hodnoty určete, jaké převýšení vodní hladiny mezi pravým a levým břehem způsobí Coriolisova síla. *Mirkovi se zdálo, že je Vltava trochu nakřivo.*

Výslednice gravitační síly, odstředivé síly a Coriolisovy síly je kolmá na hladinu řeky. Odstředivá síla se vzhledem ke směru toku řeky na převýšení mezi břehy nijak neprojeví. Dále víme, že příspěvek Coriolisovy síly k tíhovému zrychlení je malý, můžeme proto velikost výslednice $\boldsymbol{a}$ gravitačního a odstředivého zrychlení položit rovnu velikosti tíhového zrychlení $\boldsymbol{g}$. Úhel mezi zrychlením $\boldsymbol{a}$ a výsledným tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$ bude z jednoduché geometrie roven úhlu α mezi hladinou řeky bez vlivu Coriolisova zrychlení a s jeho vlivem. Označíme-li hledané převýšení h, můžeme psát

$$h = d\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Do vztahu pro Coriolisovo zrychlení

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = -2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{E}} \times \boldsymbol{v}\,,$$

kde $\omega_{\mathrm{E}} = (0, 0, \omega_{\mathrm{E}})$ je úhlová rychlost rotace Země, dosadíme rychlost řeky

$$\boldsymbol{v} = (0, -v\sin\varphi, -v\cos\varphi)\,.$$

Dostaneme

$$a_{\mathrm{C}} = 2v\omega_{\mathrm{E}}\sin\varphi\,.$$

nakonec si stačí uvědomit $\operatorname{tg}\alpha = a_{\mathrm{C}}/g$, čehož už velmi přímočaře získáme výsledek

$$h = \frac{2dv\omega_{\mathrm{E}}\sin\varphi}{g} \doteq 2\,\mathrm{cm}\,,$$

kde jsme dosazovali $\omega_{\mathrm{E}} \doteq 7{,}3\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FC ... coda

Když přijde dlouhá zima, zahřívají se někteří lidé tím, že lezou na sedm set stop vysoký ledový val. Dva zdatní jedinci vylezou až do výšky $h = 200\,\mathrm{m}$, kde se jednomu z nich vytrhnou z ledu cepíny i mačky a on padá volným pádem k zemi. Přitom začne ječet na frekvenci $f_0 = 3\,000\,\mathrm{Hz}$. Určete, jaký tón (frekvenci) uslyší kolega na stěně těsně před dopadem, pokud budeme považovat odpor vzduchu při pádu za zanedbatelný. Rychlost zvuku ve vzduchu je $c_s = 313\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Mirek poslouchal kvílení (větru).*

Celý pád rozdělíme na dva časové úseky. Za čas t_0 se padající dostane do bodu, ze kterého trvá zvuku dorazit zpět do výšky h stejnou dobu, za jakou tělo narazí do země. Tento druhý časový úsek označíme t_1. Platí tedy

$$c_{\mathrm{s}}t_1 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

a zároveň máme pro celý volný pád

$$\frac{1}{2}g(t_0+t_1)^2 = h\,.$$

V čase t_0 se zdroj zvuku pohybuje od příjemce rychlostí $v = gt_0$. Z tohoto vztahu a rovnic výše vyjádříme

$$v = \frac{c_{\mathrm{s}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{8gh}{c_{\mathrm{s}}^2}}-1}}\,.$$

Pro vzdalující se zdroj dojde ke snížení frekvence f_0 na

$$f = f_0\frac{c_{\mathrm{s}}}{c_{\mathrm{s}}+v} = f_0\left(1+\sqrt{\frac{8gh}{c_{\mathrm{s}}^2}}\right)^{-1/2} \doteq 2\,530\,\mathrm{Hz}\,.$$

Frekvence tedy poklesne skoro o 500 Hz, z hlediska hudebních intervalů to jsou ale pouze zhruba tři půltóny.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FD ... absolutně černé kuře

Dokonale sféricky symetrickému kuřeti se už nadále nechtělo setrvávat na nízké oběžné dráze ve vakuu, a tak se rozhodlo, že spadne na zem. O atmosféru zbrzdí z počáteční rychlosti $v_1 = 7\,800\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *na rychlost* $v_2 = 100\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ *během* $t = 10\,\mathrm{s}$*, přičemž výkon a teplota kuřete (která je stejná na celém povrchu) jsou v této fázi pádu konstantní. Jakou bude mít kůrka kuřete během pádu barvu (vlnovou délku maxima vyzařování), pokud jej aproximujeme absolutně černým tělesem a veškerá energie pádu je pohlcena kuřetem? Předpokládejte, že kuře neshoří a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu. Dále zanedbejte změnu potenciální energie. Poloměr kuřete je* $r = 10\,\mathrm{cm}$ *a jeho hmotnost je* $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$*, Stefanova-Boltzmannova konstanta je* $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot K^{-4}\cdot m^{-2}}$ *a Wienova konstanta je* $b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\cdot K}$.

Lukášovi se rozbila trouba.

Výkon kuřete během pádu je konstantní, lze ho proto určit jako změnu kinetické energie kuřete za daný časový úsek, tedy

$$P = \frac{\Delta E_\mathrm{k}}{t} = \frac{1}{2t} m \left(v_1^2 - v_2^2\right) \doteq 1{,}5\,\mathrm{MW}\,,$$

Předpokládáme, že veškerá energie získaná brzděním je pohlcena kuřetem a následně vyzářena, výše vypočítaný výkon je tedy zároveň vyzařovacím výkonem kuřete. Pomocí Stefan-Boltzmannova zákona $P = \sigma S T^4$, kde $S = 4\pi r^2$ je povrch kuřete, vypočítáme teplotu

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi\sigma r^2}} \doteq 3\,800\,\mathrm{K}$$

a z ní dle Wienova posunovacího zákona vlnovou délku maxima vyzařování

$$\lambda = \frac{b}{T} = b\sqrt[4]{\frac{8\pi r^2 \sigma t}{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}} \doteq 760\,\mathrm{nm}\,.$$

Kůrka kuřete tedy během pádu získá červenou barvu, přičemž maximum vyzařování bude na vlnové délce 760 nm.

Lukáš Timko
`lukast@fykos.cz`

Úloha FE ... laboratorní osvětlení

V laboratoři prasklo stropní osvětlení a místnost se ponořila do tmy. Ještě si ale nemusíme začít zoufat, neboť máme na stole zapojený sériový LC obvod. Jakou kapacitu C by musel mít kondenzátor, aby obvod při rezonanci vysílal do okolí (do vzduchu) elektromagnetické vlnění o vlnové délce $\lambda = 1\,\mathrm{km}$*, které použijeme jako nouzový radiový signál? Indukčnost cívky je* $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$.

Mirek by jednou rád zůstal v praktikách po škole.

Při rezonanci bude obvod vyzařovat na rezonanční frekvenci, dané Thomsonovým vztahem

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

Po převodu úhlové frekvence na vlnovou délku $\omega = 2\pi c/\lambda$ snadno vyjádříme

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} \doteq 3\,\mathrm{pF}\,.$$

Otázkou je, zda budeme schopni najít po tmě vhodný kondenzátor.

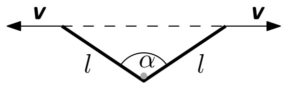
Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FF ... jako ve středověku

Když něco nedokážeme vygooglit, stává se, že se musíme uchýlit k archaickým metodám, například k hledání v knihách. Vytáhneme tedy z poličku knihu a prudce ji otevřeme. Při otevírání pohybujeme rukama od sebe v konstantní výšce, každou s konstantní rychlostí $v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, viz obrázek. Uprostřed knížky leží smítko (na obrázku šedá kulička). Určete, zda se během otevírání může smítko pohybovat se zrychlením větším než g. Pokud ano, nalezněte nejmenší úhel mezi deskami knihy α, pro který toto nastane. Šířka desek knížky je $l = 20\,\mathrm{cm}$.

Mirkovi nefungovalo Ctrl + F.

Označme $h(t)$ výšku, o kterou se smítko posunulo za čas t (měřeno od počátku otevírání). Dále označme $2o$ vzdálenost mezi rukama. Potom můžeme h vyjádřit z geometrie pravoúhlého trojúhelníku jako



Obr. 10: Otevírání knihy.

$$h = l - \sqrt{l^2 - o^2}\,.$$

Zřejmě $o = vt$, potom

$$h = l - \sqrt{l^2 - v^2t^2}\,.$$

Spočtěme první (rychlost) a druhou (zrychlení) časovou derivaci polohy

$$\dot{h} = \frac{v^2 t}{\sqrt{l^2 - v^2t^2}}\,,$$

$$\ddot{h} = \frac{v^2 l^2}{(l^2 - v^2t^2)^{3/2}}\,.$$

Vidíme, že $\ddot{h}$ je rostoucí funkce a že pro $t = l/v$ (zcela otevřená kniha) diverguje. Také platí $\ddot{h}(0) = v^2/l < g$. Zrychlení smítka tedy zcela jistě překročí hodnotu g. Nyní nalezneme čas, pro který $\ddot{h} = g$.

$$\frac{v^2 l^2}{(l^2 - v^2t^2)^{3/2}} = g \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{l^2}{v^2} - \left(\frac{l^2}{vg}\right)^{2/3}}\,.$$

Dále si vyjádříme úhel α v závislosti na čase.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{o}{l} = \frac{vt}{l} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\arcsin\left(\frac{vt}{l}\right) = 2\arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{gl}\right)^{2/3}} = 2\arccos\sqrt[3]{\frac{v^2}{gl}}\,.$$

Po číselném dosazení vyjde $\alpha = 74^\circ$.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha FG ... praktická ukázka Fyziky V

Jakou nejkratší vlnovou délku může mít foton, který vznikne při anihilaci elektronu s pozitronem? Elektron i pozitron jsou při anihilaci v klidu. Nezapomeňte, že kromě energie se musí zachovat i hybnost, a foton tedy nemůže vzniknout jen jediný. Hmotnost elektronu značíme m_e.

Tomáš se velmi silně inspiroval úlohou v praktiku IV.

Díky nápovědě v zadání nám je zřejmé, že musí vzniknout alespoň dva fotony. Víme, že energie E souvisí s vlnovou délkou λ fotonu dle vztahu

$$E = \frac{hc}{\lambda}\,,$$

kde $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}$ je Planckova konstanta a $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla. Je tedy zřejmé, že kratší vlnové délky dosáhneme vyšší energií fotonu, a tedy počet vzniklých fotonů musí být minimální. Nechť tedy vzniknou dva. Každý bude vyzářen přesně v opačném směru, pokud bude elektron a pozitron v klidu. (Ve skutečnosti nejsou dokonale v klidu, ale energie jejich pohybu je vůči jejich klidové energii zanedbatelná.) Energie, která se přemění na energii fotonů, bude

$$E_{\mathrm{anih}} = E_{\mathrm{e^+}} + E_{\mathrm{e^-}} = 2m_{\mathrm{e}}c^2\,,$$

kde $m_{\mathrm{e}} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost elektronu, která je stejná jako hmotnost pozitronu. Ze dvou částic vzniknou dva fotony a již snadno dostáváme jejich vlnovou délku

$$E_{\mathrm{anih}} = 2\frac{hc}{\lambda} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{\max} = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c} \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\,.$$

Vlnová délka vyzářených fotonů bude $h/(m_{\mathrm{e}}c) \doteq 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$.

Tomáš Bárta
`tomas@fykos.cz`

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha FH ... kdo jinému jámu kopá...

Kopáč Franz vykopal polokulovou jámu o hloubce $h = 1\,\mathrm{m}$. Vybranou zeminu házel vedle sebe stále na stejné místo (dost daleko od jámy), kde vytvořil kužel. Hustota zeminy je $\varrho = 1\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ (v zemi i na hromadě) a násypný úhel (úhel mezi zemí a pláštěm kužele) je $\alpha = 30^\circ$. Aby bylo učiněno spravedlnosti za dost, musí 80kilogramový Franz snížit své těžiště tak, aby on i přesunutá zemina měli stále stejnou potenciální energii. Poraďte mu, jak moc musí klesnout.

Michal vymýšlel úlohu na přísloví.

Označme φ_{s}, resp. φ_{c} faktory, které charakterizují polohu těžiště polokoule, resp. kužele jako podíl výšky měřený od podstavy útvaru. Rovnici spravedlnosti (ZZE) pak zapíšeme jako

$$Mg\Delta h = mg\varphi_{\mathrm{c}}v_{\mathrm{c}} + mg\varphi_{\mathrm{s}}h\,, \tag{2}$$

kde m je hmotnost přesouvané hlíny, M hmotnost Franze, v_{c} výška kuželové hromádky a Δh požadovaný výsledek (hloubka h je brána kladně). Díky zachování objemu hlíny vyjádříme výšku hromádky

$$\frac{1}{3}\pi r_{\mathrm{c}}^2 v_{\mathrm{c}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{v_{\mathrm{c}}}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 v_{\mathrm{c}} = \frac{2}{3}\pi h^3 \quad\Rightarrow\quad v_{\mathrm{c}} = \sqrt[3]{2\operatorname{tg}^2\alpha}\,h\,. \tag{3}$$

Následně dáme dohromady (2), (3) a vyjádříme m ze známých parametrů a dostaneme

$$\Delta h = \frac{2}{3}\frac{\varrho}{M}\pi h^4 \left(\varphi_\mathrm{s} + \varphi_\mathrm{c}\sqrt[3]{2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right) .$$

Koeficient φ_c určíme z váženého průměru výšek infinitezimálních disků kužele, kde vahou je hmotnost daného disku.

$$\begin{aligned} v_\mathrm{c}\varphi_\mathrm{c} &= \frac{\varrho}{m}\int_0^{v_\mathrm{c}} y\pi r^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\varrho\pi r_\mathrm{c}^2}{m}\int_0^{v_\mathrm{c}} y\frac{(v_\mathrm{c}-y)^2}{v_\mathrm{c}^2}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{\varrho\pi r_\mathrm{c}^2}{m v_\mathrm{c}^2}\left[\frac{y^2 v_\mathrm{c}^2}{2} - \frac{2y^3 v_\mathrm{c}}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^{v_\mathrm{c}} = \frac{1}{4}v_\mathrm{c} , \end{aligned}$$

tedy $\varphi_\mathrm{c} = 1/4$, přičemž jsme v mezivýpočtech označili poloměr podstavy kužele jako r_c.

Pro polokouli můžeme zvolit obdobný postup anebo drobný trik (tzv. Cavalieriho princip), kdy využijeme faktu, že válec s „vydloubnutou“ polokoulí má stejné rozložení hmotnosti jako kužel (viz obsah mezikruží). Kužel tvoří $\frac{1}{3}$ hmotnosti válce a celkově je těžiště v polovině výšky, takže musí platit

$$\frac{1}{3}(1-\varphi_\mathrm{c}) + \frac{2}{3}\varphi_\mathrm{s} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \varphi_\mathrm{s} = \frac{3}{8} .$$

Nyní už známe vše pro číselné dosazení, které dá výsledný pokles $\Delta h = 23{,}3\,\mathrm{m}$. Ani vykopaná jáma nebude Franzovi dost hluboká.

Michal Koutný
`michal@fykos.cz`

Úloha GA ... Armageddon

Objevil se asteroid na kolizním kurzu se Zemí. Pomazané hlavy se rozhodly vyslat k asteroidu kosmickou loď plnou trhavin, konkrétně 1 Mt *TNT. Protože času je málo, loď bude urychlena na cestovní rychlost* $v = 0{,}9c$*. Jakou kinetickou energii (v ekvivalentech* Mt *TNT) bude náklad mít? Energie výbuchu* 1 Mt *TNT je* $4{,}184\cdot 10^{15}$ J. *Lukáš T. se nudil na FYKOSí schůzce.*

Z teórie relativity vieme, že teleso s kľudovou (invariantnou) hmotnosťou m_0, ktoré sa voči zvolenej inerciálnej vzťažnej sústave pohybuje rýchlosťou v, má voči tejto sústave energiu

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Nehybnému telesu teda pripadá kľudová energia $E_0 = m_0 c^2$, lebo pre $v = 0$ je $\gamma = 1$. Kinetická energia je daná ako energia, ktorú získa pohybom:

$$E_\mathrm{k} = E - E_0 = m_0 c^2 \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

(všimnite si, že pre malé rýchlosti prejde tento vzorec na klasické $E_\mathrm{k} = mv^2/2$). Po dosadení $m = 10^9$ kg dostávame $E_\mathrm{k} \doteq 1{,}16\cdot 10^{26}\,\mathrm{J} \doteq 2{,}78\cdot 10^{10}$ Mt TNT.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GB ... elastická smyčka

Smyčku z kovu s modulem pružnosti E nabijeme nábojem q; poloměr smyčky po nabití je r a její průřez má plochu $S \ll r^2$. Do středu smyčky umístíme náboj Q_c. O kolik se změní její poloměr? Náboje q, Q_c jsou dostatečně malé na to, aby byly změny poloměru smyčky mnohem menší než její poloměr před nabitím. *Xellos chtěl mít největší smyčku ze všech.*

Keďže náboj je malý, môžeme čakať, že zmena polomeru $\Delta r \ll r$ a prierez slučky sa prakticky nezmení. Potom platí

$$\frac{\Delta T}{S} = E\frac{\Delta r}{r}\,,$$

kde ΔT je zmena napätia v slučke pri pridaní náboja Q_c (aj pred jeho pridaním bolo v slučke napätie T_0, spôsobené elektrostatickým pôsobením náboja na nej).

Náboj q sa rozloží na povrchu vodivej slučky; keďže slučka je tenká a situácia je rotačne symetrická, môžeme náboju na slučke priradiť dĺžkovú hustotu $\tau = q/(2\pi r)$. Napätie T_0 ostáva tiež prakticky konštantné, preto je zmena napätia daná len elektrostatickou silou $\mathrm{d}F$, pôsobiacou medzi centrálnym nábojom a elementom slučky, ktorý sa nachádza v uhle $\mathrm{d}\alpha$, ako

$$\Delta T = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}\,.$$

Z Coulombovho zákona vieme

$$\mathrm{d}F = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\tau r\,\mathrm{d}\alpha = \frac{Q_c q}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}\alpha\,,$$

a teda

$$\Delta r = \frac{\Delta T r}{SE} = \frac{Q_c q}{8\pi^2\varepsilon_0 r S E}\,,$$

kde sme využili definície modulu pružnosti $E = \sigma/\varepsilon = (\Delta T/S)/(\Delta r/r)$.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GC ... twinkle, twinkle double star

Ve vzdálenosti $d = 20\,\mathrm{pc}$ pozorujeme dvojhvězdu, přičemž hlavní poloosu vidíme kolmo pod úhlem $\alpha = 0{,}055''$ (hlavní poloosa je definovaná jako maximální vzdálenost jednotlivých hvězd). Oběžná doba dvojhvězdy je $T = 0{,}5\,\mathrm{yr}$ a hmotnost menší z hvězd je rovna hmotnosti Slunce $M_\odot = 2\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Určete poměr povrchových teplot T_1/T_2, jestliže obě hvězdy mají stejnou hustotu zářivého toku a u větší z nich (index 1) jsme naměřili dvakrát vyšší hustotu zářivého toku než u menší (index 2).

Mirek přemýšlel nad úlohami a poslouchal u toho písničky pro astronomy.

Ze znalosti vzdálenosti celého systému a z úhlové velikosti poloosy plyne dokážeme určit velikost poloosy v AU podle vztahu

$$a = \alpha d\,,$$

přičemž α dosazujeme ve vteřinách a d v parsecích. Pro převod mezi AU a metry použijeme $1\,\mathrm{AU} \doteq 1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Dále pro dvojhvězdu platí třetí Keplerův zákon ve tvaru

$$\frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2} = \frac{a^3}{T^2}\,,$$

kde m_1, m_2 označují hmotnosti jednotlivých hvězd (m_1 je podle zadání těžší/větší). Výhodné pro nás bude vyjádřit si poměr hmotností v závislosti na m_2, kterou známe.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4\pi^2 d^3 \alpha^3}{m_2 G T^2} - 1\,.$$

Úkolem je určit poměr povrchových teplot hvězd. K tomu využijeme Stefan-Boltzmannův zákon, podle kterého platí mezi zářivým výkonem L a teplotou T vztah

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,,$$

kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta a R je poloměr hvězdy. Ze zadání známe hustoty zářivého toku $F_1 = 2F_2$, vyjádříme si proto zářivý výkon jako

$$L = 4\pi d^2 F\,.$$

Bez výpočtu předpokládáme $d \gg a$, potom nám stačí vyjít ze vztahů $F \propto R^2 T^4$, $R \propto m^{1/3}$ (hustota je stejná pro obě hvězdy) a rovnou můžeme psát

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{F_1 m_2^{2/3}}{F_2 m_1^{2/3}}} = \sqrt[4]{2\frac{m_2^{2/3}}{m_1^{2/3}}} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{4\pi^2 d^3 \alpha^3}{M_\odot G T^2} - 1\right)^{-\frac{1}{6}}\,.$$

Nyní už stačí dosadit za poměr hmotností z Keplerova zákona výše a dostaneme poměr povrchových teplot $T_1/T_2 = 0{,}93$. Větší a hmotnější hvězda má tedy menší povrchovou teplotu než malá hvězda, což není příliš obvyklé.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

Úloha GD ... proč ne komplexní?

Uvažujme nemagnetickou látku s vodivostí σ a relativní permitivitou ε_r. Index lomu takovéto látky pro elektromagnetickou vlnu s úhlovou frekvencí ω je daný vztahem $n^2 = \varepsilon_r + i\sigma/(\varepsilon_0\omega)$. Jakou vzdálenost musí harmonická rovinná vlna v takové látce urazit, aby její intenzita klesla na polovinu? Předpokládejte, že $\sigma/(\varepsilon_0\omega) \ll 1$.

Xellos chtěl poukázat na to, že index lomu nemusí být jen reálný.

Pre intenzitu I EM vlny s amplitúdou E_0 platí $I = \varepsilon_r\varepsilon_0 E_0^2/2$, preto stačí nájsť vzdialenosť, na ktorej amplitúda klesne na $1/\sqrt{2}$. Pomocou vzorca $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ pre $|x| \ll 1$ dostaneme

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0\omega}} \approx \sqrt{\varepsilon_r}\left(1 + i\frac{\sigma}{2\varepsilon_r\varepsilon_0\omega}\right)\,.$$

Spomeňme si, že index lomu $n = c_0/c$ je pomer rýchlosti svetla c_0 vo vákuu a c v danej látke. Pre harmonickú rovinnú vlnu, ktorá sa šíri v smere osi x, platí

$$E = E_0 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i(\omega t - kx)}\right] = E_0 \,\mathrm{Re}\left[e^{-i(\omega t - k_0 n x)}\right]\,,$$

kde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega n}{c_0} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} = k_0 n$$

je veľkosť vlnového vektora v látke s indexom lomu n a k_0 jeho veľkosť vo vákuu, λ_0 je vlnová dĺžka vo vákuu, ω (na prostredí nezávislá) uhlová frekvencia a ν frekvencia vlny.

Po dosadení za n dostávame

$$E = E_0 \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_0 n_\mathrm{r} x) - k_0 n_\mathrm{i} x}\right] = E_0 \mathrm{e}^{-k_0 n_\mathrm{i} x} \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_0 n_\mathrm{r} x)}\right] ,$$

kde sme reálnu a imaginárnu zložku indexu lomu označili n_r a n_i. Vidíme, že amplitúda vlny klesá so vzdialenosťou exponenciálne; my hľadáme x_0, pre ktoré platí $\mathrm{e}^{-k_0 n_\mathrm{i} x_0} = 1/\sqrt{2}$, resp. $\mathrm{e}^{2k_0 n_\mathrm{i} x_0} = 2$. Po zlogaritmovaní máme

$$x_0 = \frac{\ln 2}{2k_0 n_\mathrm{i}} = \frac{\ln 2\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}\varepsilon_0 \omega}{\sigma k_0} = \frac{\ln 2\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}\varepsilon_0 c_0}{\sigma} .$$

S klesajúcou vodivosťou táto vzdialenosť rastie a pre nevodivé látky ($\sigma \to 0$) sa blíži nekonečnu.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha GE ... magnetická vodka

V odměrné kádince s vodkou se pod hladinou nachází tyčový magnet s póly ve svislém směru. Nad hladinu je přiložen další tyčový magnet se stejným průřezem tak, aby se magnetické pole mezi magnety dalo považovat za homogenní a mimo prostor mezi magnety za nulové. Z rysky kádinky jsme odečetli objem $V_1 = 180{,}261\,\mathrm{ml}$*, ale po sečtení objemů samostatného magnetu a vodky v kádince vyšel objem pouze* $V_2 = 180{,}258\,\mathrm{ml}$*. Vyjádřete susceptibilitu vodky, víte-li, že velikost homogenního magnetického pole byla* $B = 0{,}3\,\mathrm{T}$*, hustota vodky je* $\varrho = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, průřez magnetů byl* $S_1 = 2\,\mathrm{cm}^2$ *a průřez kádinky* $S_2 = 50\,\mathrm{cm}^2$*. Povrchové jevy a magnetické vlastnosti vzduchu zanedbejte. Předpokládejte, že susceptibilita vodky je mnohem menší než 1.*

Lubošek zavzpomínal na Estonsko.

Nejprve si uvědomme, co se v naší aparatuře děje. Následkem přítomnosti magnetického pole nebude hladina vodky rovná. Objem kádinky odečítáme z rysky na stěně nádoby, tzn. odpovídá výšce hladiny při okraji kádinky. Toto je důvod, proč skutečný a naměřený objem tekutiny (s magnetem) není totožný.

Zanedbáme-li povrchové jevy, mohla by situace vypadat např. jako na obrázku 11.

Můžeme předpokládat, že kapalina má relativní permeabilitu blízkou jedné. Pišme ji ve tvaru

$$\mu_\mathrm{r} = 1 + \chi ,$$

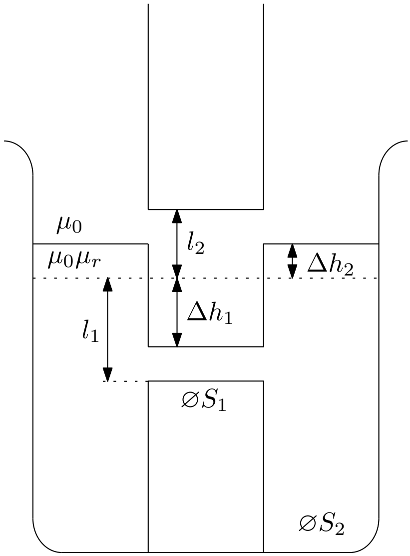
kde χ je magnetická susceptibilita vodky a platí $\chi \ll 1$.

Nejprve vyřešme, jaký bude rozdíl hladin Δh_2 (podle obr. 11). Systém se bude nacházet v klidovém stavu s nejnižší energií. Energii budeme počítat z potenciální energie vodky a z energie magnetického pole. Pro celkovou energii E platí

$$E = \frac{1}{2} g\varrho (S_2 - S_1)(l_1 + \Delta h_2)^2 + \frac{1}{2} g\varrho S_1 (l_1 - \Delta h_1)^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 (l_2 + \Delta h_1) S_1 + \frac{1}{2\mu_\mathrm{r}\mu_0} B^2 (l_1 - \Delta h_1) S_1 ,$$

kde členy po řadě odpovídají potenciální energii vodky mimo oblasti magnetů, potenciální energii vodky mezi magnety, energii magnetického pole ve vzduchu, energii magnetického pole ve vodce. Užili jsme přitom vztahu pro hustotu energie w magnetického pole

$$w = \frac{1}{2\mu_\mathrm{r}\mu_0} B^2 .$$



Obr. 11: Změna tvaru hladiny vodky mezi magnety.

Ze zachování objemu dostáváme

$$(S_2 - S_1)\Delta h_2 = S_1 \Delta h_1 \,.$$

Označme

$$\sigma = \frac{S_2 - S_1}{S_1} \,.$$

Po dosazení a úpravě

$$\frac{E}{S_1} = \frac{1}{2} g\varrho\sigma\Delta h_2^2 + \frac{1}{2} g\varrho\sigma^2\Delta h_2^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \Delta h_2 \sigma - \frac{1}{2(1+\chi)\mu_0} B^2 \Delta h_2 \sigma + C \,,$$

kde jsme do konstanty C zahrnuli členy neobsahující Δh_2.

Našim cílem bude najít takové Δh_2, aby energie byla co nejnižší, takže můžeme derivaci energie (resp. výrazu E/S_1) podle Δh_2 položit rovnu nule:

$$0 = g\varrho\sigma\Delta h_2 + g\varrho\sigma^2\Delta h_2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \sigma - \frac{1}{2(1+\chi)\mu_0} B^2 \sigma \,.$$

Po úpravách dostaneme

$$0 = (1+\sigma)\varrho g \Delta h_2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \chi \,,$$

přičemž jsme použili aproximaci

$$\frac{1}{1+\chi} \approx 1 - \chi \,.$$

Nyní lze již snadno nahlédnout, že rozdíl naměřených objemů $V_1 - V_2$ bude

$$V_1 - V_2 = S_2 \Delta h_2\,;$$

po dosazení Δh_2 do této rovnosti a dosazení za σ vyjádříme hledanou susceptibilitu

$$\chi = -\frac{2\varrho g \mu_0 (V_1 - V_2)}{S_1 B^2}\,.$$

Po číselném dosazení dostaneme $\chi = -4\cdot 10^{-6}$. Záporná susceptibilita znamená, že vodka bude z oblasti mezi magnety vytlačena. Vodka se tedy chová spíše jako voda, která má na rozdíl od lihu také zápornou susceptibilitu.

Lubomír Grund
`grund@fykos.cz`

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.