Řešení úloh Fyziklání 2021

15. ročník soutěže

Úloha M.1 ... kočárek

5 bodů

Dětský kočárek váží $M = 7{,}0\,\mathrm{kg}$ a má čtyři kola s poloměrem $R = 10\,\mathrm{cm}$, na kterých je hmotnost rovnoměrně rozložena. Kolikrát větší silou musí maminka tlačit kočárek s dítětem o hmotnosti $m_1 = 7{,}0\,\mathrm{kg}$ v porovnání s případem, kdy je v něm dítě o hmotnosti $m_2 = 3{,}5\,\mathrm{kg}$? Hlavním zdrojem odporových sil jsou místa dotyku kol se zemí. *Danka uvažuje o mateřství.*

Hlavním zdrojem odporových sil jsou místa dotyku kol se zemí, takže dominantní odporovou silou je tření. Valivé tření je dáno vztahem

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}\,,$$

kde f je koeficient tření[1] a F_n je normálová síla, kterou je kolo přitlačované k zemi, tedy v našem případě $F_\mathrm{n} = F_g = (M + m_{1,2})\,g$. To, že se tíhová síla rozloží na všechny čtyři kola, nemá na velikost třecí síly vliv. Pro podíl sil máme

$$\frac{F_{\mathrm{t},1}}{F_{\mathrm{t},2}} = \frac{fg}{fg}\frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{M + m_1}{M + m_2} \doteq 1{,}33\,.$$

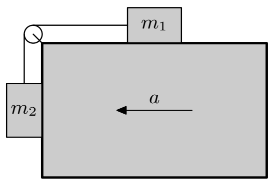
Maminka tedy musí při tlačení těžšího dítěte vyvinout 1,33 krát větší sílu.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha M.2 ... kladky na vagónu

5 bodů

Mějme vagón ve tvaru kvádru, který se pohybuje se zrychlením a. Na něm je položený kvádr s hmotností $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$, který je lanem přes kladku spojený s kvádrem o hmotnosti $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$, který visí před přední stěnou vagónu. Jaké má být zrychlení a, aby tyto dva kvádříky nezrychlovaly vzhledem k vagónu, pokud se všechno pohybuje bez tření? *Lego má rád kladky.*



Aby visiaci kváder nezrýchľoval vzhľadom na vagón, musí byť zvislá zložka výslednej sily nulová. Vodorovná zložka zodpovedajúca zrýchľovaniu sústavy je kompenzovaná normálovou silou od prednej steny. Gravitačná sila, ktorá naň pôsobí je jednoducho $F_2 = m_2 g$. Jediná sila, ktorá ju môže vykompenzovať je sila od lana. Táto sila teda musí ťahať kváder nahor s veľkosťou $T = F_2$.

Rovnakou silou potom ťahá aj druhý kváder, ten zase smerom dopredu, pričom v jeho prípade je to jediná sila, ktorá naň pôsobí vo vodorovnom smere. Na to, aby tento kváder nezrýchľoval vzhľadom na vagón, musí byť výsledná sila, ktorá naň pôsobí práve taká, aby zrýchľoval so zrýchlením a dopredu a jej veľkosť teda musí byť $F_1 = m_1 a$. Gravitačná sila sa vyruší s normálovou od strechy a zostane iba sila, ktorou ho ťahá lano, čiže $F_1 = T$. Dáme to všetko dokopy a dostaneme požadované zrýchlenie vagóna

$$a = \frac{m_2}{m_1} g \doteq 6{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

[1] Obvykle sa vyjadřuje jako podíl ramena valivého odporu a poloměru kola, ukazuje se však, že tento vztah úplně neplatí.

Úloha M.3 ... neposedná pračka

5 bodů

V pračce se nachází buben s prádlem, jehož osa je vodorovná se zemí. Mokré prádlo aproximujme jako tuhé těleso o hmotnosti $m = 3{,}5\,\mathrm{kg}$ s těžištěm vzdáleným $r = 4{,}9\,\mathrm{cm}$ od středu otáčení. Buben vykoná 421 otáček za minutu. Jakou minimální hmotnost musí pračka mít, aby neposkakovala? Uvažujte, že pračka se může pohybovat jen ve svislém směru.

Jardu rušila pračka při vymýšlení úloh.

Prádlo je na kruhové dráze udržováno dostředivou silou, která má velikost

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = 4\pi^2 m f^2 r\,,$$

kde frekvenci vyjádříme jako $f = \frac{421\,\mathrm{ot}}{60\,\mathrm{s}} \doteq 7{,}02\,\mathrm{Hz}$. Tato dostředivá síla (ve vztažné soustavě se zemí) je součtem ostatních sil, tedy síly tíhové a síly, kterou působí pračka na buben. Poslední jmenovanou sílu vektorově vyjádříme jako $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathrm{d} - \mathbf{F}_g$. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že stejná síla působí na pračku. Její směr se mění, někdy pračku přitlačuje k zemi, jindy nadzvedává. Právě ve chvíli, kdy je prádlo v bubnu nad osou otáčení, směřuje reakce dostředivé síly nahoru. Aby se pračka odlepila od země, musí být tato reakce větší než tíha pračky, odkud dostáváme minimální hmotnost pračky jako

$$M = m\left(\frac{4\pi^2 f^2 r}{g} - 1\right) \doteq 30{,}5\,\mathrm{kg}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha M.4 ... negativní měsíc

5 bodů

Pro účely této úlohy můžeme Zemi aproximovat dokonalou koulí s hustotou $\rho_\mathrm{Z} = 5{,}52\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Pro Měsíc platí to samé, jeho hustota je však $\rho_\mathrm{M} = 3{,}34\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Jakou objemovou nábojovou hustotu bychom museli vytvořit v obou tělesech, aby jejich celková silová interakce byla nulová? Obě tělesa jsou nabitá rovnoměrně a nábojová hustota je v nich stejná.

Jáchym šel v noci po ulici.

Pro splnění podmínky ze zadání se musí velikost přitažlivé gravitační síly rovnat velikosti odpudivé elektrostatické síly. Označíme-li vzdálenost středů těles r, máme

$$\frac{G m_\mathrm{Z} m_\mathrm{M}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\mathrm{Z} q_\mathrm{M}}{r^2}\,.$$

Hmotnost lze spočítat jako součin hustoty a objemu, neboli $m = \rho V$. Pokud nábojovou hustotu označíme ρ_n, bude pro náboj platit podobný vztah $q = \rho_\mathrm{n} V$. Dosazením do předchozí rovnice dostáváme po vykrácení vzdálenosti

$$G\rho_\mathrm{Z} V_\mathrm{Z} \rho_\mathrm{M} V_\mathrm{M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_\mathrm{n} V_\mathrm{Z} \rho_\mathrm{n} V_\mathrm{M} \quad\Rightarrow\quad \rho_\mathrm{n} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 G \rho_\mathrm{Z} \rho_\mathrm{M}} \doteq 3{,}70\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C\cdot m^{-3}}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha M.5 ... odpočinek na nádraží 5 bodů

Mišo sedí v drážním domečku a vyhlíží svůj oblíbený vlak. Protože oknem vidí jen část kolejí, chtěl by zjistit, kolik má času, než mu vlak zmizí ze zorného pole. Změřil si, že okno je široké $c = 1{,}5\,\mathrm{m}$ *a je vzdálené* $p = 10\,\mathrm{m}$ *od kolejí. Židle, na které sedí, stojí přesně před středem okna a je od něj* $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ *daleko. Mišo dále ví, že vlak je dlouhý* $d = 100\,\mathrm{m}$ *a jeho brzdná dráha bude* $s = 150\,\mathrm{m}$. *Kolik času tedy má na prohlédnutí vlaku (tj. od chvíle, kdy se lokomotiva v okně objeví, do okamžiku, kdy konec vlaku zmizí z výhledu), pokud vlak začne rovnoměrně zpomalovat z rychlosti* $v = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *přesně v okamžiku, kdy ho Mišo spatří? Šířku vlaku zanedbejte.*

Verča jela na expedici.

Začneme tím, že určíme zrychlení vlaku a, se kterým bude zpomalovat. Známe brzdnou dráhu vlaku s a jeho počáteční rychlost v, takže zrychlení určíme ze vztahů pro rovnoměrně zpomalený pohyb jako

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s}\,.$$

Nyní spočítáme, jakou dráhu vlak urazí během toho, kdy si ho Mišo může prohlížet. K tomu potřebujeme znát délku úseku kolejí, které jsou vidět oknem; označme si ji třeba b. Trojúhelník tvořený Mišovou židlí a bočními stranami okna je podobný trojúhelníku tvořenému Mišovou židlí a nejvzdálenějšími body kolejí, které jsou z okna vidět. Bude tedy platit

$$\frac{c}{b} = \frac{l}{l+p} \quad \Rightarrow \quad b = \left(1 + \frac{p}{l}\right)c\,.$$

Vzdálenost, kterou vlak urazí během Mišova pozorování, bude součet vzdálenosti b a délky vlaku d. Protože už známe zrychlení vlaku i vzdálenost, kterou má urazit, můžeme spočítat hledaný čas řešením kvadratické rovnice jako

$$b + d = vt - \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\left(1 + \frac{p}{l}\right)c + d\right)\frac{1}{s}}\right)\,.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme dva výsledky $t_1 \doteq 22{,}8\,\mathrm{s}$ a $t_2 \doteq 7{,}16\,\mathrm{s}$. Čas, který hledáme, je t_2, zatímco čas t_1 vyjadřuje dobu, po jaké by se vlak dostal do stejného místa, pokud by se po zabrždění opět rozjel se zrychlením $-a$.

Veronika Hendrychová
vercah@fykos.cz

Úloha M.6 ... jak je důležité míti spolujezdce 5 bodů

Na silnici se čelně srazila dvě auta stejné značky, stejného modelu, obě jedoucí rychlostí $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$*. Obě auta bez posádky váží stejně,* $1\,200\,\mathrm{kg}$*. V jednom autě cestoval pouze řidič vážící* $80\,\mathrm{kg}$*, ve druhém autě cestovalo více lidí dohromady vážících* $200\,\mathrm{kg}$*. Účinky srážky byly zmírněny deformací celého motorového prostoru, srážka trvala dobu* $80{,}0\,\mathrm{ms}$*. Spočítejte průměrné zrychlení působící na posádku lehčího auta v násobcích tíhového zrychlení.* *Jindra jel s Danem v autě.*

Ve vztažné soustavě spojené se zemským povrchem se obě auta pohybují rychlostí $v = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, tj. $25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ proti sobě. Hmotnosti aut se liší, tudíž i jejich společné těžiště se pohybuje. Pro jednoduchost se přesuneme do inerciální vztažné soustavy spojené se společným těžištěm aut (těžišťová soustava). Zrychlení se nemění přechodem mezi inerciálními soustavami. Označme $m_1 = 1\,280\,\mathrm{kg}$ hmotnost auta s jedním řidičem a $m_2 = 1\,400\,\mathrm{kg}$ hmotnost auta s více lidmi. V těžišťové soustavě se první auto pohybuje rychlostí

$$v_1 = v\frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

a druhé auto se pohybuje rychlostí

$$v_2 = v\frac{2m_1}{m_1 + m_2}.$$

Po srážce jsou obě auta v klidu, nepohybují se. Srážka trvala dobu $t = 80{,}0\,\mathrm{ms}$, takže průměrné zrychlení působící na posádku lehčího auta spočítáme jako

$$a_1 = \frac{v_1}{t} = \frac{v}{t}\frac{2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Číselně vychází $a_1 = 326\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 33{,}3\,\mathrm{G}$ (G je jednotka používaná v letectví, jde o násobky tíhového zrychlení). Pro zajímavost, poměr zrychlení těžšího a lehčího auta je $a_1/a_2 = m_2/m_1 \doteq 1{,}09$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha M.7 ... fotbalistický problém 5 bodů

Jarda se koukal na fotbalovou Ligu mistrů a uvažoval nad tím, jak musí být přihrávky fotbalistů přesné. Představme si, že hráč s balonem přihrává spoluhráči, který běží směrem od něj rychlostí $u = 7{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a v době přihrávky stojí na ofsajdové hraně vzdálené* $L = 20\,\mathrm{m}$ *od přihrávajícího. Ten se rozhodl balon kopnout pod úhlem* $\alpha = 30^\circ$ *od země směrem k rozběhnutému spoluhráči. Jakou rychlostí musí balon kopnout, aby spadl běžícímu hráči do běhu přesně k nohám?* *Jarda se místo přednášek kouká na fotbal.*

Aby fotbalista dostal míč přesně k nohám, musí být v okamžiku, kdy se balon dotkne země, na místě jeho dopadu. Označme t čas, který balon stráví ve vzduchu. Svislá počáteční rychlost je $v_y = v_0 \sin\alpha$, kde v_0 je počáteční rychlost balonu. Balon přestane stoupat, když svislá rychlost klesne na nulu, to se stane za čas $t_1 = \frac{v_y}{g}$. Stejnou dobu balon bude padat, takže ve vzduchu stráví celkovou dobu $t = \frac{2v_y}{g}$. Za tento čas uletí vodorovným směrem dráhu

$$x = v_x t = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}\,.$$

V této vzdálenosti od přihrávajícího musí být v době dopadu míče druhý hráč. Ten tak za čas t musel uběhnout vzdálenost $s = ut = x - L$. Z této a předchozí rovnice dostáváme po dosazení za t kvadratickou rovnici pro počáteční rychlost

$$v_0^2 \sin 2\alpha - 2uv_0 \sin \alpha - Lg = 0\,.$$

Řešením je

$$v_0 = \frac{u \sin \alpha + \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + Lg \sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha} \doteq 19{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

kde jsme vybrali kladný kořen, záporný nemá fyzikální smysl.

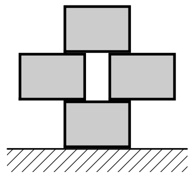
Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha M.8 ... zeď

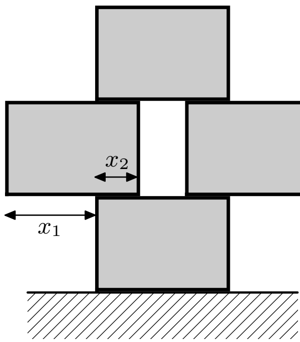
5 bodů

Mějme čtyři stejné homogenní kvádry s rozměry $a \times b \times b$, kde $a = 29{,}7\,\mathrm{cm}$ a $b = 21{,}0\,\mathrm{cm}$, které uspořádáme jako na obrázku. Jaká je maximální délka mezery mezi prostředními dvěma cihlami?

Jáchym chtěl postavit zeď formátu A4.



Pokud by cihla měla spadnout, otočila by se kolem bodu na konci spodní cihly. Ten nám dělí délku cihly na dvě části $x_1 + x_2 = a$, jak je naznačeno na obrázku.



Podmínkou stability je, že celkový moment sil působících na cihlu vzhledem k tomuto bodu je nulový. Má-li levá část hmotnost

$$m_1 = \frac{x_1}{a} m\,,$$

působí na její těžiště síla $m_1 g$. Kolmá vzdálenost těžiště od bodu otáčení je $x_1/2$, čili výsledný moment bude $x_1 m_1 g/2$.

Na druhou část cihly působí jak obdobný moment $x_2 m_2 g/2$, tak moment od horní cihly. Její hmotnost se rovnoměrně rozloží na prostřední dvě cihly, takže síla bude $mg/2$. Působiště je v pravém horním rohu cihly (stačí si představit, že se cihla otočí o velmi malý úhel), což znamená kolmou vzdálenost x_2 a výsledný moment $x_2 mg/2$. Musí platit rovnost momentů

$$\frac{x_1 m_1 g}{2} = \frac{x_2 m_2 g}{2} + \frac{x_2 m g}{2}\,,$$
$$x_1^2 = x_2^2 + a x_2\,.$$

Dosadíme $x_1 = a - x_2$ a dostáváme

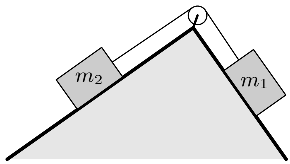
$$x_2 = \frac{1}{3} a\,.$$

Maximální délka mezery bude

$$x = a - 2x_2 = \frac{1}{3} a \doteq 9{,}9\,\mathrm{cm}\,.$$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha M.9 ... kladky na nakloněném hranolu 5 bodů



Mějme hranol s podstavou pravoúhlého trojúhelníka a na dvou jeho kolmých stěnách kvádříky o hmotnostech $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ spojené lanem přes kladku. Jaký úhel musí svírat stěna, na které leží kvádřík s hmotností m_1, oproti vodorovnému směru, aby byly kvádříky v klidu, jestliže neuvažujeme tření?

A kromě kladek má Lego rád úlohy, které jsou si podobné.

Na oba kvádriky pôsobia 3 sily:

- gravitačná smerom dole s veľkosťou $m_i g$,
- normálová od steny kvádra – tá zabezpečuje, aby sa kvádrik „neprepadol“, čiže zruší zložku gravitačnej sily, ktorá je kolmá na stenu kvádra a nechá len tú rovnobežnú so stenou,
- ťahová od lana, ktorá ich ťahá smerom hore, rovnobežne so stenou.

Ak teda chceme, aby boli kvádriky v pokoji, tak ich lano musí ťahať silou, ktorá je rovná veľkosti zložky gravitačnej sily rovnobežnej so stenou. Zároveň má zrejme rovnakú veľkosť pre oba kvádriky (inak by výsledná sila pôsobiaca na lano bola nenulová, to by zrýchľovalo, a teda by zrýchľovali aj kvádriky). Takže dostávame, že zložky gravitačnej sily rovnobežné so stenou musia byť pre oba kvádriky rovnako veľké. Symbolicky

$$F_{\mathrm{t},1} = F_{\mathrm{t},2}\,,$$
$$m_1 g \sin\varphi = m_2 g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = m_2 g \cos\varphi\,,$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{m_2}{m_1} \doteq 34^\circ\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha M.10 ... A 5 bodů

Písmeno A se skládá ze dvou tuhých tyčí dlouhých $4l$, které jsou nahoře spojeny kloubem a dále jsou v polovinách svých délek spojeny provazem o délce l. Jestliže tyče mají poloměr $r = l/64$ a jsou vyrobené z kovu o hustotě $\rho = 6\,850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, jaké nejvyšší písmeno A dokážeme postavit? Lano má stejný poloměr jako tyče, ale je vyrobené z materiálu o zanedbatelné hustotě, který vydrží napětí v tahu až do výše $\sigma = 4{,}50\,\mathrm{MPa}$. Tření neuvažujte.

Jáchym chtěl mít první úlohu, alespoň podle abecedy.

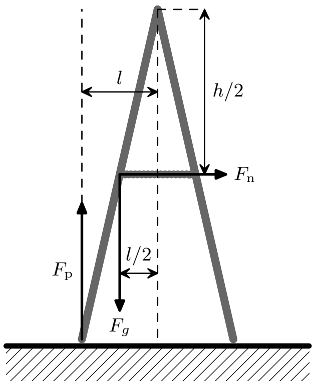
Délka tyče je $4l$, takže její hmotnost bude

$$m = 4\pi\rho r^2 l\,.$$

Na provazu bude napětí σ, jeho výsledkem bude síla

$$F_\mathrm{n} = \pi r^2 \sigma\,.$$

Na každou z tyčí bude působit reakční síla podložky, jejíž velikost bude rovna velikosti tíhové síly $F_g = mg$ pusobící v těžišti. Poslední síla bude působit v místě, kde se obě tyče spojují, ale její hodnotu nemusíme počítat.



Aby byla soustava v rovnováze, musí být celkový moment sil působících na tyče nulový. Vztahujeme-li momenty k bodu, kde se obě tyče spojují, bude rameno tlakové síly podložky l, rameno napěťové síly bude $h/2$ a rameno tíhové síly bude $l/2$. Zde h označuje výšku písmena, pro kterou platí

$$h = \sqrt{(4l)^2 - l^2} = \sqrt{15}l\,.$$

Z podmínky nulového momentu dostáváme

$$0 = lF_g - \frac{l}{2}F_g - \frac{h}{2}F_\mathrm{n}\,,$$

$$0 = \frac{4\pi\rho r^2 l^2 g}{2} - \frac{\sqrt{15}\pi r^2 l\sigma}{2}\,,$$

$$l = \frac{\sqrt{15}\sigma}{4\rho g}\,.$$

Všimněme si, že čím větší bude napětí, tím větší bude l a zřejmě i h. Pro výpočet maximální výšky písmene dosadíme nejvyšší povolené napětí, čímž nám vyjde

$$h = \sqrt{15} l = \frac{15\sigma}{4\rho g} \doteq 251\,\mathrm{m}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha M.11 ... padající mince 5 bodů

Nechme stejné mince o poloměru $r = 1\,\mathrm{cm}$ klouzat po nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 45^\circ$ a délkou $l = 50\,\mathrm{cm}$, která je ukončená podložkou o délce $d = 65\,\mathrm{cm}$. Kolik minimálně mincí jsme takto museli pustit (včetně první), aby první mince spadla přes hranu podložky? Uvažujte dokonale pružné srážky a konstantní koeficient smykového tření $f = 0{,}5$ mezi mincemi a povrchem. *Kiko to umí s penězi.*

Pri šmýkaní mince po naklonenej rovine pôsobí na mincu v rovnobežnom smere s podložkou sila s veľkosťou

$$F = mg \sin\alpha - fmg\cos\alpha\,.$$

Výsledné zrýchlenie pôsobiace na mincu bude podľa druhého Newtonovho zákona rovné

$$a_1 = (\sin\alpha - f\cos\alpha)\,g\,.$$

Ide o rovnomerne zrýchlený pohyb a teda výsledná rýchlosť po skĺznutí z naklonenej roviny bude

$$v = \sqrt{2a_1 l}\,.$$

Potom nasleduje rovnomerne spomalený pohyb spôsobený trením. Výsledné spomalenie bude

$$a_2 = fg\,.$$

Stred prvej mince teda dôjde do vzdialenosti

$$x = \frac{v^2}{2a_2} = \frac{a_1}{a_2} l = \left(f^{-1}\sin\alpha - \cos\alpha\right) l \doteq 35{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Kvôli rovnakej hmotnosti všetkých mincí a pružným zrážkam sa prichádzajúca minca po náraze zastaví a odovzdá celú svoju hybnosť minci pred ňou (podobne ako v prípade Newtonovho kyvadla). Vo finále sa teda prvá minca po každom náraze posunie práve o veľkosť jej priemeru. Toto by sa dalo spočítať, ale vo výsledku ide o to, že sa akoby pri každej zrážke idúca minca zrazu teleportovala o svoj priemer dopredu, pričom pri tomto „teleportovaní" nestráca energiu trením. No a tým, že trením sa vo výsledku musí vždy stratiť rovnaké množstvo energie a po každom pustení je tu o mincu viac (o jeden priemer, kde sa nebude viac strácať energia), minca vždy dôjde o tento priemer ďalej.

Tímto způsobem se vytvoří vzor, kde se budou pravidelně střídat mince s prázdnými místy o stejné velikosti. Úloha by se značně zkomplikovala, pokud by se mince začaly hromadit v místě, kde nakloněná rovina přechází v podložku. To se ale naštěstí nestane, protože vzor bude vždy symetrický vzhledem k bodu, ve kterém se původně zastavil střed první mince, a tento bod je dostatečně daleko za středem podložky.

Aby minca prepadla, musí sa jej stred dostať za okraj, takže celkový počet mincí n, ktoré sme museli do obehu pustiť, aby prvá vypadla cez hranu podložky, dáva podmienka

$$2\,(n-1)\,r + x > d\,.$$

Čo po vyjadrení n dáva

$$n > \frac{d-x}{2r} + 1\,.$$

Po vyčíslení predchádzajúcej nerovnice dôjdeme k minimálnej hodnote mincí $n = 16$.

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha M.12 ... skákající mince 5 bodů

Kiko položil na otvor vychlazené lahve s iced tea o teplotě $5\,\mathrm{^\circ C}$ *tenkou minci s hmotností* $m = 4\,\mathrm{g}$. *Mince pak po chvilce začala poskakovat. Spočítejte, kolikrát mince poskočila, jestliže pokojová teplota vzduchu byla* $25\,\mathrm{^\circ C}$ *a poloměr mince byl* $r = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. *Kiko se nudil u piva.*

Po vytiahnutí fľaše z chladničky sa vzduch vo fľaši začne zohrievať, čím sa začne rozpínať. K poskočeniu mince dôjde vtedy, keď tlak vo fľaši stúpne natoľko, že presiahne gravitačnú silu pôsobiacu na mincu. Vtedy minca mierne poskočí a tlak sa vyrovná. Pri každom z procesov dochádza k izochorickému rozpínaniu plynu, teda platí

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}\,.$$

Po poskočení mince sa vnútorný tlak vyrovná s vonkajším a počiatočný tlak každého procesu tak bude $p_1 = p_\mathrm{a}$. Rozdiel tlakov potrebný na poskočenie je

$$\Delta p = p_2 - p_\mathrm{a} = \frac{mg}{\pi r^2}\,.$$

Teplota vo fľaši pri prvom skoku bude teda

$$T_2 = p_2 \frac{T_1}{p_1} = \left(\frac{mg}{\pi r^2} + p_\mathrm{a}\right)\frac{T_1}{p_\mathrm{a}} = \left(\frac{mg}{\pi r^2 p_\mathrm{a}} + 1\right) T_1\,.$$

Pri n-tom skoku by teplota vo fľaši musela byť

$$T_n = \left(\frac{mg}{\pi r^2 p_\mathrm{a}} + 1\right)^n T_1\,,$$

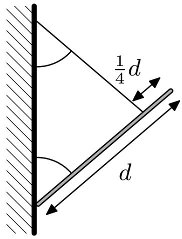
tá však môže dosiahnuť maximálnu hodnotu $25\,\mathrm{^\circ C}$, preto počet skokov dostávame z podmienky

$$T_n < 25\,\mathrm{^\circ C}\,.$$

Maximálnu hodnotu skokov n môžeme dopočítať zlogaritmovaním rovnice pre premennú T, alebo postupným počítaním. Netreba samozrejme zabudnúť previesť teplotu na kelviny. Výsledná hodnota vychádza $n = 14$.

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha M.13 ... lezeme 5 bodů



Horolezec s hmotností $m = 75\,\mathrm{kg}$ *a výškou* $d = 180\,\mathrm{cm}$ *leze po svislé stěně nahoru. V jistém okamžiku stojí tak, že jeho tělo svírá se stěnou stejný úhel, jako svírá se stěnou i lano, na které je přivázán celotělovým postrojem ve vzdálenosti* $\frac{3}{4}d$ *od svých bot dotýkajících se stěny. V téhle chvíli je třecí síla mezi botami horolezce a stěnou rovna mezní statické smykové třecí síle. Jak velkou silou je napínáno lano? Koeficient statického smykového tření mezi stěnou a botami je* $f = 0{,}40$. *Uvažujte, že tíhová síla působí na horolezce v jeho těžišti v polovině výšky těla.* *Danka přemýšlela nad lezením.*

Označme α úhel zmíněný v zadání, $k = 3/4$ a F sílu, kterou na horolezce působí lano. Dále na něj působí normálová síla od stěny F_n, třecí síla F_t a tíhová síla F_g. Vodorovné složky těchto sil musí být v rovnováze, takže platí

$$F_\mathrm{n} - F\sin\alpha = 0\,.$$

Stejně tak musí být nulový součet svislých složek

$$F_\mathrm{t} + F\cos\alpha - F_g = 0\,.$$

Z podmínky nulového celkového momentu sil, který vztáhneme k bodu, ve kterém se horolezec dotýká lana, vyplývá

$$F_\mathrm{t}kd\sin\alpha - F_\mathrm{n}kd\cos\alpha - F_g\left(k - \frac{1}{2}\right)d\sin\alpha = 0\,.$$

Posledními dvěma vztahy je velikost třecí a tíhové síly

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}\,,$$
$$F_g = mg\,.$$

Máme pět rovnic pro pět neznámých (čtyři síly a jeden úhel). Prvním krokem k jejich řešení je dosazení za třecí sílu. Dále si z prvních dvou rovnic vyjádříme hledané napětí lana

$$F = \frac{F_\mathrm{n}}{\sin\alpha} = \frac{F_g - fF_\mathrm{n}}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{n}}{F_g - fF_\mathrm{n}}\,.$$

Tím jsme se zbavili F a získali jsme tangens úhlu α. Ten si můžeme snadno vyjádřit i z rovnice momentů sil, odkud dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F_\mathrm{n}k}{2fF_\mathrm{n}k - F_g\,(2k-1)}\,.$$

Dáme-li oba výrazy pro $\operatorname{tg}\alpha$ dohromady, vyjde nám konečně vztah mezi normálovou a tíhovou silou

$$F_\mathrm{n} = \frac{F_g\,(4k-1)}{4fk}\,.$$

Ten dosadíme do předchozí rovnice, čím získáme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4k-1}{f} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{4k-1}{\sqrt{f^2 + (4k-1)^2}}\,,$$

kde jsme využili identitu

$$\sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Nyní už jen dosadíme do jednoho z předchozích vyjádření pro F a máme výsledek

$$F = \frac{F_\mathrm{n}}{\sin\alpha} = \frac{F_g\left(4k-1\right)}{4fk}\frac{\sqrt{f^2+\left(4k-1\right)^2}}{4k-1} = \frac{mg}{4k}\sqrt{1+\left(\frac{4k-1}{f}\right)^2} \doteq 1\,250\,\mathrm{N}\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha M.14 ... náraz do zdi 5 bodů

Jindra chtěl původně nechat valící se válec narazit do zdi, jenže pak mu došlo, že nedokáže spočítat průběh srážky. Proto vzal homogenní válec o hmotnosti $m = 12\,\mathrm{kg}$, délce $l = 50\,\mathrm{cm}$ a poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$, roztočil ho úhlovou rychlostí $\omega = 50\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ okolo osy rotační symetrie a položil ho na podlahu tak, aby se dotýkal zdi. Dochází k prokluzování jak v místě dotyku s podlahou, tak v místě dotyku se stěnou. Koeficient tření válce s podlahou je $\mu_1 = 0{,}38$ a koeficient tření mezi válcem a stěnou je $\mu_2 = 0{,}57$. Spočítejte hodnotu třecí síly mezi válcem a stěnou. Válec se točí v takovém smyslu, že kdyby před ním nestála stěna, valil by se směrem do stěny. *Jindra bořil zeď.*

V okamžiku dotyku se stěnou působí na válec několik sil. Tíhová síla $\mathbf{F}_g$ působí směrem dolů, třecí síla $\mathbf{T}_1$ od podložky zpomaluje rotaci válce a tlačí tedy válec směrem do stěny, reakční síla $\mathbf{N}_2$ od stěny vyrovnává účinky třecí síly od podlahy, třecí síla $\mathbf{T}_2$ od stěny působí nahoru a taktéž zpomaluje rotaci a reakční síla $\mathbf{N}_1$ od podložky vyrovnává účinky tíhové síly a třecí síly od stěny. Jelikož válec prokluzuje, jsou třecí síly maximální možné (tzn. koeficient tření krát normálová síla). Platí rovnováha sil

$$T_1 = N_2\,,$$
$$T_2 = mg - N_1\,.$$

Dále máme k dispozici definiční vztahy pro třecí sílu $T_i = \mu_i N_i$. To je soustava lineárních rovnic se čtyřmi neznámými (N_1, N_2, T_1, T_2), kde hledáme T_2. Nejdříve si za N_i dosadíme příslušné $T_i\mu_i^{-1}$. Potom si z první rovnice vyjádříme sílu

$$T_1 = \mu_2^{-1} T_2\,,$$

kterou dosadíme do druhé a dostaneme

$$T_2 = mg - \left(\mu_1\mu_2\right)^{-1} T_2\,,$$
$$T_2 = \frac{mg}{\left(\mu_1\mu_2\right)^{-1}+1}\,.$$

Po dosazení čísel ze zadání vyjde $T_2 \doteq 21{,}0\,\mathrm{N}$.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha M.15 ... nekvantové provázání 5 bodů

Mějme bod, ze kterého vylétává dvojice fotonů, jejichž polarizace jsou na sobě vždy kolmé. Jak název úlohy napovídá, nemyslíme tím, že by byly v superpozici. Jinak řečeno, oba fotony mají danou polarizaci, jen nevíme jakou. Dále dáme oběma fotonům do cesty polarizátor, přičemž roviny polarizace těchto polarizátorů jsou rovnoběžné. Jaká je pravděpodobnost, že oba fotony z dané dvojice proletí polarizátory? *Lego si chystal přednášku na soustředění.*

Označme si uhol, ktorý zviera rovina polarizácie jedného fotónu s rovinou polarizácie polarizátorov φ. Pravdepodobnosť, že tento fotón preletí polarizátorom bude $p_1 = \cos^2\varphi$. Rovnako definovaný uhol pre druhý fotón bude $\pi/2 - \varphi$ a pravdepodobnosť, že preletí on je $p_2 = \cos^2(\pi/2 - \varphi) = \sin^2\varphi$. Takže pravdepodobnosť, že preletia oba bude

$$p_{12} = p_1 p_2 = \cos^2\varphi \sin^2\varphi = 1/4 \sin^2(2\varphi)\ .$$

Uhol φ je náhodný a treba cez neho vystredovať

$$\overline{p}_{12} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} p_{12}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\,,$$

kde na zintegrovanie nám stačilo to, že integrál $\sin^2$ cez celočíselný násobok jeho polperiódy je vždy rovný polovici intervalu. Rovnako dobre sme mohli stredovať cez celé 2π, ale takisto stačilo aj cez $\pi/4$.

Zostáva dodať, že keď sa napríklad pozitrónium rozpadá na dva fotóny s kolmou polarizáciou, a keby sme im dali do cesty polarizátory s rovnobežnými rovinami polarizácie, tak by sme nepozorovali žiadne prípady, kedy by preleteli oba fotóny. Z toho presne vyplýva, že polarizácie fotónov nemôžu byť dané už v momente rozpadu, ale až v momente merania.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha M.16 ... vodní planeta 5 bodů

Mějme nerotující planetu s poloměrem $R = 2\,000\,\mathrm{km}$ tvořenou pouze kapalnou vodou. Atmosférický tlak na vodní hladině je $p_\mathrm{a} = 10\,\mathrm{kPa}$. Jaká bude hodnota tlaku v jejím středu? Uvažujte, že voda je nestlačitelná. *Honza přemýšlel nad tím, co vše může ve vesmíru existovat.*

Na každou část planety bude působit gravitační a tlaková síla. Podmínku hydrostatické rovnováhy potom vyjadřuje rovnice

$$\nabla p = \rho \mathbf{a}_\mathrm{g}\,,$$

kde p je tlak, ρ je hustota vody a $\mathbf{a}_\mathrm{g}$ je gravitační zrychlení. Vzhledem ke sférické symetrii problému bude gravitační síla vždy směřovat do středu planety a její velikost bude funkcí vzdálenosti od středu r. Stejně tak velikost tlaku bude záviset pouze na r. Pro popis tak bude výhodnější přejít do sférických souřadnic, ve kterých bude platit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \rho a_\mathrm{g}\,.$$

Dále se zaměříme velikost gravitačního zrychlení. Představme si, že se nacházíme na souřadnici r. Z Gaussovy věty vyplývá, že do gravitačního působení bude přispívat pouze hmota pod námi, tedy koule o poloměru r. Ta bude mít hmotnost

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \,.$$

Gravitační zrychlení pak jednoduše bude

$$a_\mathrm{g} = -\frac{Gm}{r^2} = -\frac{4\pi G r\rho}{3} \,,$$

kde znaménko mínus znamená, že gravitace míří proti směru rostoucí souřadnice r. Po dosazení za a_g do druhé rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}p = -\frac{4\pi G\rho^2}{3} r \,\mathrm{d}r \,.$$

Rovnici zintegrujeme podle příslušných mezí a vyjádříme si tlak uprostřed planety

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p_\mathrm{a}} \mathrm{d}p &= -\int_0^R \frac{4\pi G\rho^2}{3} r \,\mathrm{d}r \,, \\ p_\mathrm{a} - p_0 &= -\frac{2\pi G\rho^2}{3} R^2 \,, \\ p_0 &= p_\mathrm{a} + \frac{2\pi G\rho^2}{3} R^2 \doteq 557\,\mathrm{MPa} \,. \end{aligned}$$

Jan Benda
`honzab@fykos.cz`

Úloha M.17 ... závody autíček 5 bodů

Jarda vzpomínal, jaký měl krásný život, když ještě nebyl organizátorem FYKOSu. Vybavil si například, že jako malý dostal hodně vysokou autodráhu ve tvaru šroubovice, po které pouštěl autíčka o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{g}$ dolů. Poloměr dráhy byl $r = 10\,\mathrm{cm}$ a za jednu otočku sjelo autíčko o $h = 8\,\mathrm{cm}$ níže. Autíčko se při svém pohybu třelo o vnější okraj dráhy se součinitelem tření $\mu = 0{,}3$. V čase t_0 pustil jedno autíčko, o pět sekund později další. Kolik nejvíce pater bude mít první autíčko náskok na druhé, jestliže je můžeme považovat za hmotné body?

Jarda vzpomíná na klukovské časy.

Pokud si autodráhu rozvineme do roviny, bude pohyb autíčka vypadat jako jízda na nakloněné rovině. Ve směru spádu roviny na něj bude působit tečná složka tíhové síly o velikosti

$$F_g^\mathrm{t} = mg\sin\alpha \,,$$

kde α je úhel mezi nakloněnou rovinou a vodorovnou plochou. Autíčko se pohybuje na kolech, proto na něj žádná odporová síla od vozovky nepůsobí. Když jedno patro šroubovice rozvineme do roviny, dostaneme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek h a $2\pi r$, takže z geometrie dostáváme

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}} \,.$$

Na autíčko ale přeci jen působí třecí síla. Je totiž udržováno na kruhové dráze o poloměru r. Aby toto bylo možné, musí na něj působit dostředivá síla

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv_\mathrm{h}^2}{r}\,,$$

kde v_h je horizontální složka rychlosti. Ta má velikost $v_\mathrm{h} = v\cos\alpha$. Kosinus úhlu α je

$$\cos\alpha = \frac{2\pi r}{\sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}}\,.$$

Touto silou se zároveň tlačí autíčko na okraj dráhy, takže zde vzniká třecí síla

$$F_\mathrm{t} = \mu F_\mathrm{d} = \frac{\mu m v_\mathrm{h}^2}{r} = \frac{\mu m v^2}{r}\cos^2\alpha\,.$$

Nyní již máme vyjádřeny všechny důležité síly, které na autíčko při pohybu působí, a můžeme sestavit pohybovou rovnici

$$F = F_g^\mathrm{t} - F_\mathrm{t} \quad\Rightarrow\quad \dot{v} = g\sin\alpha - \frac{\mu v^2}{r}\cos^2\alpha\,.$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme samozřejmě řešit, ale možná se nám do toho úplně nechce, takže se pokusíme najít výsledek úlohy jinou cestu. Vidíme, že se vzrůstající rychlostí zrychlení klesá, zároveň ale rychlost nemůže překročit určitou mez

$$v_\mathrm{t} = \sqrt{\frac{gr\sin\alpha}{\mu\cos^2\alpha}}\,.$$

Té se říká terminální rychlost a dostaneme jí prostým dosazením $a = 0$. Autíčko jí dosáhne v nekonečném čase, do té doby bude jeho zrychlení kladné. To ale znamená, že se jeho rychlost bude jen zvyšovat, takže bude platit $v(t + t_0) > v(t)$. Autíčko, které je na dráze delší dobu, ujede za jednotku času delší vzdálenost než druhé. Rozdíl mezi nimi se tak stále zvyšuje a maximální bude v $t = \infty$. V této situaci už je ale rychlost obou aut rovna v_t. Pokud první autíčko projelo jistým bodem, druhé jím projede o čas $t = 5\,\mathrm{s}$ později. Jejich maximální dráhový rozdíl tak je $\Delta s = v_\mathrm{t} t$. Výškový rozdíl dostaneme, pokud si šroubovici zase rozvineme. Potom zřejmě

$$\Delta h = \Delta s \sin\alpha\,.$$

Počet pater, o které je jedno autíčko níž než druhé, bude

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{gh}{\mu r\sqrt{h^2 + (2\pi r)^2}}} \doteq 5{,}1\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha E.1 ... antidieta Země 5 bodů

O kolik by se zvýšila hmotnost Země, pokud by se její střední poloměr zvětšil o $\Delta r = 1{,}0\,\mathrm{m}$ dodáním materiálu o stejné střední hustotě jako má v současnosti?

Karel přemýšlel nad dopady meteoritů.

Nejprve určíme hustotu Země. Tu bychom mohli rovnou nalézt na internetu, ale určeme ji z veličin, které známe. Uvažujme, že Země je přibližně koule s poloměrem $R_\oplus \doteq 6{,}378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Jde sice o rovníkový poloměr, ale dopustíme se relativně malé chyby. Hmotnost Země je $M_\oplus = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Hustotu snadno určíme jako

$$\rho_\oplus = \frac{M_\oplus}{V_\oplus} = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} \doteq 5\,497\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \doteq 5\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Pokud porovnáme s hustotou, kterou můžeme nalézt např. na Wikipedii, kde je uvedena hustota $5\,515\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, pak nám náš vypočítaný odhad stačí pro výsledek platný na dvě platné cifry.

Samotné řešení může být velice jednoduché, pokud si uvědomíme, že se poloměr Země zvětší pouze velice málo. Tím pádem se prakticky nezmění plocha jejího povrchu $S_\oplus$ vůči původní. Změna objemu Země je pak součin plochy povrchu Země a změny výšky

$$\Delta V = S_\oplus \Delta r = 4\pi R_\oplus^2 \Delta r \doteq 5{,}11 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3\,.$$

Hmotnost se změní o

$$\Delta m = \rho_\oplus \Delta V = \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3} 4\pi R_\oplus^2 \Delta r = \frac{3M_\oplus}{R_\oplus}\Delta r \doteq 2{,}8 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}\,.$$

Hmotnost Země se zvýší o $2{,}8 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$, což je $0{,}000\,047\,\%$ původní hmotnosti.

Alternativním postupem by bylo vypočítat hmotnost zvětšené Země a odečíst hmotnost původní. Vzhledem k malému nárůstu poloměru by mělo jít o zanedbatelný rozdíl. Přesvědčeme se o tom

$$\begin{aligned}\Delta m' = \rho_\oplus \Delta V' &= \frac{3M_\oplus}{4\pi R_\oplus^3}\left(\frac{4}{3}\pi\left(R_\oplus + \Delta r\right)^3 - \frac{4}{3}\pi R_\oplus^3\right) \\ &= \frac{M_\oplus}{R_\oplus^3}\left(3R_\oplus^2\Delta r + 3R_\oplus \Delta r^2 + \Delta r^3\right)\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že nám vyšel trojčlen. Jeho první člen je výsledkem, který jsme dostali v přibližném výpočtu a další členy jsou skutečně zanedbatelné a po zaokrouhlení nám vyjde stejný výsledek. Zanedbání bychom nemohli provést, až když by nárůst poloměru byl výrazný ve srovnání s původním poloměrem Země.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha E.2 ... Diomedovy ostrovy 5 bodů

Dva malé ostrovy vzdálené od sebe pouze 3,7 km *se nachází v Beringově průlivu. Západnější ostrov patří Rusku a ten druhý je součástí USA. Zajímavé na nich je to, že přímo mezi nimi prochází mezinárodní datová hranice (proto se někdy ostrovům přezdívá Tomorrow Island* *a Yesterday Island). Jednou v zimě, když byl průliv zamrzlý, přešel jeden cestovatel z amerického ostrovu přímo na ruský průměrnou rychlostí* $4\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ *(toto radši nezkoušejte, je to nelegální). Jeho GPS aplikace mu ale zobrazila velmi podivnou průměrnou rychlost, protože čas startu i konce cesty počítala podle lokálního času. Jakou průměrnou rychlost mu zobrazila? Ruský ostrov se nachází v časovém pásmu +12, americký v pásmu -9. Nezapomeňte na znaménko.* *Matěj by rád cestoval, ale teď to nejde.*

Trik spočívá v tom si uvědomit, jakým směrem se otáčí Země. Například když je na Greenwichském poledníku právě 12:01 13. 2., je na ruském ostrově 00:01 14. 2. a na americkém 3:01 13. 2. K skutečnému času tedy musíme přičíst falešných $12\,\mathrm{h} - (-9\,\mathrm{h}) = 21\,\mathrm{h}$.

Cesta mu ve skutečnosti trvala $\frac{3{,}7\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}} = 0{,}925\,\mathrm{h}$, z čeho pro novou falešnou průměrnou rychlost

$$\frac{3{,}7\,\mathrm{km}}{21{,}925\,\mathrm{h}} = 0{,}168\,8\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 4{,}69\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}\,.$$

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.3 ... voda na Marsu 5 bodů

Mars nemá moc vody. Představte si, že bychom na Marsu chtěli vytvořit oceán a přemístili bychom tam veškerou vodu z Tichého oceánu, čímž by na Marsu vznikl Nový Tichý oceán pokrývající téměř celou planetu. Jak by se změnila průměrná hloubka tohoto oceánu po přesunutí? Uveďte záporné číslo, pokud by se zmenšila. Počítejte s tím, že Tichý oceán před přesunem pokrývá třetinu zemského povrchu a obsahuje $7{,}1 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^3$ *vody. Poloměr Marsu je* $3\,390\,\mathrm{km}$ *a pro jednoduchost uvažujte, že nerotuje.* *Matěj měl žízeň.*

Povrch Země je $S_\mathrm{Z} = 4\pi R_\mathrm{Z}^2$. Vzhledem k tomu, že hloubka oceánu je velmi malá v porovnání s poloměrem Země, můžeme průměrnou hloubku Tichého oceánu vypočítat jako

$$h_0 = \frac{V}{\frac{1}{3}S_\mathrm{Z}} = \frac{3V}{4\pi R_\mathrm{Z}^2}\,,$$

kde V je objem Pacifiku a $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$. Pro Tichý oceán na Marsu by průměrná hloubka byla

$$h_1 = \frac{V}{S_\mathrm{M}} = \frac{V}{4\pi R_\mathrm{M}^2}\,,$$

kde $R_\mathrm{M} = 3\,390\,\mathrm{km}$ je poloměr Marsu. Rozdíl hloubek je

$$h_1 - h_0 = \frac{V}{4\pi}\left(\frac{1}{R_M^2} - \frac{3}{R_\mathrm{Z}^2}\right) \doteq 750\,\mathrm{m}\,.$$

Hloubka Pacifiku by se tedy zvětšila o necelý kilometr.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.4 ... koulíme po neandrtálsku 5 bodů

Starověké civilizace vynalezly kolo už dávno. Spočítejte, jak prudký svah bychom potřebovali, aby se sám od sebe rozkutálel pravidelný 42-úhelník.

Kiko si v technickém muzeu prohlížel kostitřas.

Na to, aby mohlo dôjsť k preklopeniu telesa, musí byť poloha jeho ťažiska priamo nad vrcholom, cez ktorý sa má teleso preklopiť (v skutočnosti je to trochu viac vpravo, no my riešime práve ten kritický prípad). Pre uhol medzi stranou n-uholníka a priamkou prechádzajúcou ťažiskom a príslušným vrcholom strany platí

$$\varphi = \frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2} \,.$$

Aby došlo k preklápaniu, musel by byť uhol rovný $\pi/2$. K tomu mu dopomôže náklon svahu, ktorý teda musí byť

$$\alpha = \pi/2 - \varphi = \frac{\pi}{n} \,.$$

Pre 42-uholník to vychádza približne $4{,}3\,^\circ$.

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha E.5 ... sucho 5 bodů

Relativní vlhkost v Dančině pokoji je nepříjemných $\Phi_{\mathrm{r},1} = 20\,\%$. Kolik vody musí nechat Danka odpařit, aby vlhkost vzduchu stoupla na $\Phi_{\mathrm{r},2} = 50\,\%$? Danka má v pokoji $V = 15\,\mathrm{m}^3$ vzduchu s teplotou 25°C, přičemž ve vzduchu je při téhle teplotě odpařených $\Phi_1 = 4{,}6\,\mathrm{g{\cdot}m^{-3}}$ vody.

Danka měla v pokoji příliš sucho.

Vlhkosť vzduchu Φ je definovaná ako

$$\Phi = \frac{m}{V} \,,$$

kde m je hmotnosť vody nachádzajúcej sa vo vzduchu a V je celkový objem vzduchu. Pre relatívnu vlhkosť vzduchu platí

$$\Phi_\mathrm{r} = \frac{\Phi}{\Phi_m} \,,$$

kde Φ_m je hmotnosť odparenej vody na jednotku objemu vzduchu, pri ktorej pri danej teplote nastane nasýtenie vzduchu vodou. Z aktuálnej situácie môžeme určiť množstvo vody v kubickom metri pri nasýtení, teda Φ_m, ako

$$\Phi_m = \Phi_1/\Phi_{\mathrm{r},1} \,.$$

Pre rozdiel hmotností vody vo vzduchu dostávame z prvej rovnice

$$\Delta m = m_2 - m_1 = V\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) = V\Phi_m\left(\Phi_{\mathrm{r},2} - \Phi_{\mathrm{r},1}\right) \,.$$

Dosadením pre Φ_m tak máme

$$\Delta m = V\Phi_1\left(\frac{\Phi_{\mathrm{r},2}}{\Phi_{\mathrm{r},1}} - 1\right) \doteq 104\,\mathrm{g} \,.$$

Danka teda musí odpariť približne 104 g vody.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha E.6 ... věšení prádla 5 bodů

Verča věší ručníky na sušák tak, že si je přehodí přes tyč se čtvercovým průřezem. Oba konce ručníku visí dolů. Jednou si všimla, že část ručníku, která není v zákrytu s druhým koncem, schne rychleji. Rozhodla se tedy, že bude věšet ručníky tak, aby se překrývala co nejmenší část, ale aby se ručník ještě udržel na tyči a nesklouzl dolů. S jakým největším poměrem délek visících částí ručníku (delší ku kratší) může Verča ručník pověsit, aby nespadl? Součinitel smykového tření mezi tyčí sušáku a ručníkem je $f = 0{,}2$ a ručník má hmotnost $m = 1\,\mathrm{kg}$.

Verča hledá fyziku i v domácích pracích.

Označme si hmotnost delší části ručníku jako m_1 a kratší jako m_2, přičemž předpokládáme, že hmotnost ručníku je rozložena rovnoměrně. Na jedné části bude působit tíhová síla $F_{g,1} = m_1 g$ a na druhé $F_{g,2} = m_2 g$. Proti větší tíhové síle ($F_{g,1}$) bude zároveň v kritické konfiguraci působit třecí síla $F_\mathrm{t} = mgf$, která ručník bude držet na tyči. Dostáváme tak rovnici

$$F_{g,2} + F_\mathrm{t} = F_{g,1}\,,$$

po dosazení

$$m_2 g + mgf = m_1 g\,.$$

Zároveň víme, že $m_1 + m_2 = m$, takže si z toho po dosazení za m můžeme vyjádřit poměr hmotností jako

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1+f}{1-f}\,.$$

Poměr hmotností odpovídá hledanému poměru délek, dosazením numerických hodnot vychází $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}$. Všimněme si, že jediná veličina, která má na výsledek vliv, je součinitel tření. Na hmotnosti ani tíhovém zrychlení nezávisí.

Veronika Hendrychová
`vercah@fykos.cz`

Úloha E.7 ... gravitace 5 bodů

Matěj by se chtěl projít po Měsíci, ale je těžké se tam dostat. Tak udělal takový trik, že se nafilmoval, jak skáče po Zemi, a pak si video pustil zpomaleně. S jakou snímkovací frekvencí si musí klip pustit, aby to vypadalo, že skáče po Měsíci? Kamera má frekvenci 60 fps. Uvažujte, že tíhové zrychlení na Měsíci je šestkrát menší než na Zemi. *Matěj a filmové triky.*

Omezíme se pouze na svislou složku obecného pohybu, protože vodorovné složky nejsou ovlivněny tíhovým zrychlením. Pro volný pohyb v homogenním tíhovém poli g platí rovnice

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0\,,$$

kde v_0 je svislá rychlost v čase $t = 0$ a y_0 je poloha v témže čase. Nyní provedeme transformaci od nečárkovaných veličin k čárkovaným a požadujeme, aby výsledná transformovaná pohybová rovnice byla stejná, protože svislá poloha y je stejná v originálním i zpomaleném klipu, takže

$$y(t) = y'\left(t'\right) = -\frac{1}{2} g' t'^2 + v_0' t' + y_0'\,.$$

Chceme, aby platilo $g' = g/6$. Porovnáním jednotlivých členů (rovnice $y(t) = y'(t')$ musí být splněna pro všechny možné hodnoty v_0 a y_0) dostáváme

$$t' = t\sqrt{6}\,, \quad v_0' = \frac{v_0}{\sqrt{6}}\,, \quad y_0' = y_0\,. \tag{1}$$

Z toho vidíme, že čas musí být zpomalen $\sqrt{6}$-krát, tedy za dobu, za kterou by uplynulo v originálním záběru 60 snímků, uplyne ve zpomaleném záběru pouze $\frac{60}{\sqrt{6}} \doteq 24{,}5$ snímku.

Ačkoliv je to mazaný trik, má jednu nevýhodu. Matějova rychlost totiž při odrazu bude kvůli (1) vypadat, že je $\sqrt{6}$-krát menší. Bude se tedy zdát, že Matěj dokáže vyskakovat pouze s docela malou rychlostí.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha E.8 ... lano na nakloněné rovině

5 bodů

Mějme nakloněnou rovinu svírající úhel $\varphi = 50^\circ$ s vodorovným směrem. Na ní je položeno (po celé její délce) lano s délkovou hustotou $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Výškový rozdíl mezi horním a spodním bodem nakloněné roviny je $h = 1{,}7\,\mathrm{m}$. Jakou silou musíme lano nahoře držet, aby nesklouzlo dolů, jestliže je mezi lanem a rovinou nulové tření?

Legovi se už nechce vymýšlet původy, sorry :D

Lano bude mať hmotnosť $m = \lambda h/\sin\varphi$. Nakoľko rovina svoj sklon nijako nemení, môžeme celú hmotnosť „presunúť do ťažiska“ a rátať ako s hmotným bodom. Potom dostávame, že zložka tiažovej sily kolmá na rovinu bude vyrušená normálovou silou a zložka rovnobežná s rovinou, čiže tá, proti ktorej budeme musieť pôsobiť, aby sme lano udržali, bude mať veľkosť $F = F_g \sin\varphi = g\lambda h \doteq 25{,}0\,\mathrm{N}$.

Môžeme si všimnúť, že táto sila nezávisí na uhle, ale iba na výškovom rozdieli.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha X.1 ... drtivá srážka

5 bodů

Dva hmotné body o hmotnostech $m_1 = 50{,}0\,\mathrm{kg}$ *a* $m_2 = 60{,}0\,\mathrm{kg}$, *vzdálené od sebe* $l = 6{,}00\,\mathrm{m}$, *začnou být z klidu vzájemně přitahovány konstantní silou* $F = 100\,\mathrm{N}$. *Jakou rychlostí se srazí?*

Verča vzpomínala, jak se spolužáky chodili bruslit.

Začneme tím, že zjistíme závislost polohy obou bodů na čase. Předpokládejme, že první bod je v počátku a druhý se nachází ve vzdálenosti l na ose x, přičemž se k sobě začnou pohybovat. Protože je síla konstantní, oba body se k sobě začnou přibližovat rovnoměrně zrychleným pohybem. Jejich zrychlení můžeme vyjádřit jako podíl působící síly a jejich hmotností. Pro polohy bodů v čase tak dostáváme

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m_1}t^2\,,$$
$$x_2 = l - \frac{1}{2}a_2t^2 = l - \frac{1}{2}\frac{F}{m_2}t^2\,.$$

Srážka pak nastane v okamžiku, kdy se polohy bodů budou rovnat, tedy

$$\frac{1}{2}\frac{F}{m_1}t^2 = l - \frac{1}{2}\frac{F}{m_2}t^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2lm_1m_2}{F\left(m_1+m_2\right)}}\,.$$

Zbývá spočítat jejich vzájemnou rychlost. K tomu použijeme vzorec $v = at = \frac{F}{m}t$. Protože se body pohybují po přímce směrem k sobě, bude jejich vzájemná rychlost součtem jejich jednotlivých rychlostí, čili

$$v = v_1 + v_2 = Ft\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = \sqrt{\frac{2lm_1m_2}{F\left(m_1+m_2\right)}}\frac{F\left(m_1+m_2\right)}{m_1m_2} = \sqrt{\frac{2Fl\left(m_1+m_2\right)}{m_1m_2}}\,.$$

Po dosazení číselných hodnost dostaneme, že se hmotné body srazí vzájemnou rychlostí $v = 6{,}63\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Veronika Hendrychová
vercah@fykos.cz

Úloha X.2 ... nefunkční Pythagorova věta

5 bodů

Matěj nemá rád klikaté cesty a radši chodí rovně. Ze všeho nejradši má, když jde přesně ve směru jedné ze čtyř světových stran. Jednou přemýšlel nad tím, jaký by byl nejhezčí způsob cesty z Prahy do Brna. Mohl by buď jít přímo na východ a pak na jih, nebo nejdřív na jih a pak na východ (pokaždé udělá právě jednu otočku o 90°*). Jaký je rozdíl dráhy první a druhé cesty? (pokud je první cesta kratší, očekáváme záporný výsledek). Ve skutečnosti by měl na výsledek mnohem větší vliv konkrétní tvar terénu, uvažujte tedy, že Země je dokonalá koule. Souřadnice Prahy jsou* $50{,}08^\circ N, 14{,}44^\circ E$ *a Brna jsou* $49{,}20^\circ N, 16{,}61^\circ E$.

Matěj přemýšlel nad tím, jaký typ projekce používají Google mapy.

Musíme si uvědomit, jak vypadá Matějova trajektorie. V obou případech jde jednu část cesty po rovnoběžce a druhou po poledníku. Po poledníku ujde v obou případech stejné vzdálenosti, protože potřebuje přejít mezi rovnoběžkou procházející Prahou a rovnoběžkou procházející Brnem. Pro druhou část cesty to již neplatí, protože vzdálenost dvou poledníků není konstantní.

Při pohybu směrem na východ se Matěj pohybuje po jedné rovnoběžce. Poloměr rovnoběžky r záleží na severní šířce (značíme φ) jako

$$r = R\cos\varphi \,,$$

kde $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ je poloměr Země. Vzdálenost s, kterou po rovnoběžce urazil, je dána délkou kružnicového oblouku s úhlem $\Delta\lambda = \lambda_\mathrm{B} - \lambda_\mathrm{P}$, potom

$$s = \frac{\pi}{180^\circ} r\Delta\lambda \,,$$

kde zeměpisnou délku ve stupních značíme λ a faktor $\frac{\pi}{180^\circ}$ převádí stupně na radiány. Jako rozdíl drah dostáváme

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \frac{\pi}{180^\circ}\left(r_1 - r_2\right)\Delta\lambda = \frac{\pi}{180^\circ} R\Delta\lambda\left(\cos\varphi_\mathrm{P} - \cos\varphi_\mathrm{B}\right) \doteq -2\,830\,\mathrm{m} \,.$$

Vidíme tedy, že i při pohledu na rovnou mapu „malé“ České republiky dochází k jisté deformaci, která způsobuje, že se skutečné vzdálenosti mohou lišit až o několik kilometrů.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Úloha X.3 ... otrávená 5 bodů

Do rybníka, ve kterém je $V = 130\,\mathrm{m^3}$ vody, se dostala jistá jedovatá látka. Jediným přítokem je potok s průtokem $Q = 3{,}8\,\ell\cdot\mathrm{s^{-1}}$ a voda z něj se v rybníku okamžitě mísí s kontaminovanou vodou. Za jak dlouho se koncentrace nebezpečné chemikálie sníží na desetinu, jestliže se výška hladiny rybníka nemění? *Jarda chtěl rybařit v Bečvě.*

Označme koncentraci jedovaté látky v rybníce c. Jestliže se voda v rybníce dokonale mísí s vodou z potoka, pak z rybníka odtéká voda, která má koncentraci jedu také c, zatímco do něj vtéká voda s nulovou koncentrací škodliviny. Pokud se výška hladiny nemění, znamená to, že do rybníka přiteče tolik vody, kolik odteče. Změna množství jedovaté látky v rybníce za časový úsek $\mathrm{d}t$ bude

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(cV\right)}{\mathrm{d}t} = V\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \,.$$

Během této doby z rybníka odteče voda o objemu $Q\,\mathrm{d}t$, tedy množství poklesne o $\mathrm{d}n = -cQ\,\mathrm{d}t$. Z toho dostáváme diferenciální rovnici

$$V\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -cQ \,,$$

kterou řešíme separací proměnných

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} = -\frac{Q}{V}\,\mathrm{d}t \,.$$

Integrací vyjde

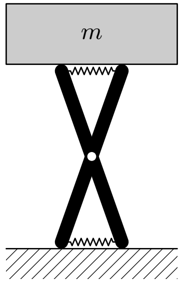
$$c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-\frac{Q}{V}t} \,.$$

Pokud se má koncentrace snížit na desetinu, musí platit $c(t) = \frac{c_0}{10}$. Odtud vyjádříme čas jako

$$t = \frac{V}{Q}\ln\frac{c_0}{c} = \frac{V}{Q}\ln 10 \doteq 21{,}9\,\mathrm{h} \,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha X.4 ... zákeřné X 5 bodů



Na obrázku jsou dvě tyče délky $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ spojené uprostřed tak, že se mohou vůči sobě volně otáčet. Protější vrcholy tyčí jsou spojeny dvěma pružinkami s tuhostí $k = 90\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a klidovou délkou $s = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Na konstrukci shora položíme závaží o hmotnosti m a počkáme, až se situace ustálí. Najděte velikost m, pro kterou se délka pružinky zdvojnásobí. Předpokládejte, že se konstrukce nemůže převrátit. *Jáchym měl dlouhou chvilku.*

Označme délku pružinky po natažení $2x$, počáteční délku $2x_0 = s$, výšku konstrukce $2y$ a délku tyčí $2r = l$. Zřejmě platí

$$r^2 = x^2 + y^2 \,.$$

Velikost síly, kterou pružinky působí na konce tyčí, bude $F_x = 2k\,(x - x_0)$. Tíhová, resp. vztlaková síla se rovnoměrně rozloží, čili na každý konec bude působit $F_y = mg/2$. Tyče se vůči sobě nebudou otáčet ve chvíli, kdy bude celkový moment, působící na každou z nich, nulový. Z toho dostáváme podmínku

$$xF_y = yF_x \,.$$

Po dosazení za síly vyjde

$$m = \frac{4ky\,(x - x_0)}{gx} \,.$$

Hledáme takovou hmotnost, pro kterou se pružinka dvakrát prodlouží, neboli pro kterou bude platit $x = 2x_0$. Pomocí tohoto vztahu si z první rovnice vyjádříme $y = \sqrt{r^2 - 4x_0^2}$. Můžeme psát výsledek

$$m = \frac{4k\,(2x_0 - x_0)}{2gx_0}\sqrt{r^2 - 4x_0^2} = \frac{2k}{g}\sqrt{r^2 - 4x_0^2} = \frac{k}{g}\sqrt{l^2 - 4s^2} \doteq 8{,}21\,\mathrm{kg} \,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha X.5 ... skluz 5 bodů

Jáchym našel kámen ve tvaru dokonalého rotačního elipsoidu s poloosami $a = 5{,}3\,\mathrm{cm}$ a $b = 3{,}5\,\mathrm{cm}$, kde a je osa rotační symetrie, a poslal jej po rovné ledové ploše tak, že úhel φ mezi hlavní osou elipsoidu a svislým směrem byl po celou dobu pohybu konstantní. Spočítejte největší možnou velikost úhlu φ, jestliže hmotnost kamene je $m = 32\,\mathrm{g}$, počáteční rychlost je $v = 2{,}79\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a koeficient tření mezi kamenem a ledem je $f = 0{,}30$.

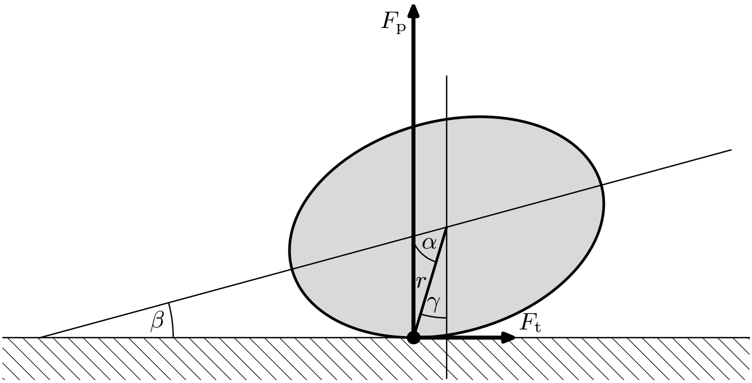
Jáchym byl ve skluzu s úlohami do třetí série, tak vymýšlel úlohy do Fyziklání.

Klíčem k řešení úlohy je podmínka stability kamene vzhledem k rotaci. Z pohledu vnějšího pozorovatele na něj působí tři síly – tíhová, reakční od ledové plochy F_p a třecí $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{p}$. Moment sil vzhledem ke středu kamene musí být nulový, z čehož plyne

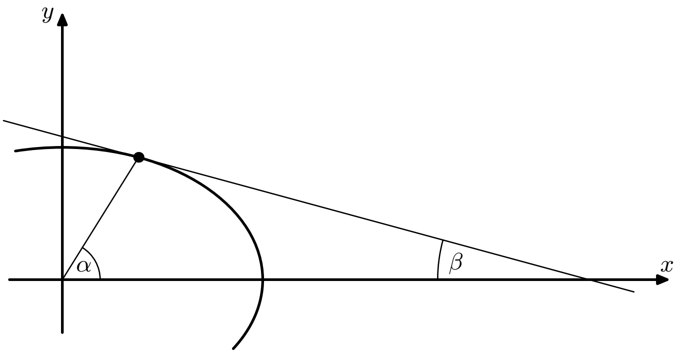
$$F_\mathrm{t} r \cos\gamma = F_\mathrm{p} r \sin\gamma \,,$$

kde r je délka spojnice středu kamene a bodu, kde se dotýká ledu, a γ je odklon této spojnice vzhledem ke svislému směru, viz obrázek 1. Rovnici upravíme na

$$f = \operatorname{tg}\gamma \,. \qquad (2)$$



Obr. 1: Nákres kamene ve skluzu.



Obr. 2: Část průřezu kamene. Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x, vedlejší s osou y. Velikosti úhlů α a β odpovídají těm z obrázku 1.

Nyní si představme elipsoid otočený tak, že delší poloosa leží na ose x a střed kamene je v počátku. Část jeho povrchu, ležící v rovině xy, můžeme popsat funkcí

$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,,$$

viz obrázek 2. Sklon tečny k funkci od vodorovného směru označíme $-\beta$. Mínus jsme zvolili proto, že víme, že tento úhel bude záporný, ale my se zajímáme jen o jeho velikost. Tangens tohoto sklonu bude roven derivaci funkce, takže máme

$$y' = -b\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{a^2} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x}{y}\,.$$

Pro bod na povrchu elipsoidu, ve kterém derivaci počítáme, definujme α jako úhel mezi spojnicí bodu se středem elipsoidu a hlavní poloosou. Potom bude platit

$$y' = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta\,.$$

Tím jsme dostali druhý zásadní vztah

$$\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{k}\,, \tag{3}$$

kde k není jen konstanta. Je to nástroj překvapení, který se nám bude hodit později.

Z geometrie situace si rozmyslíme, že $\varphi = \alpha + \gamma$ a $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Dále budeme potřebovat následující goniometrické identity

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}x}\,,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\,.$$

Zřejmě platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha+\gamma) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = k\operatorname{tg}\alpha\,.$$

V poslední rovnosti jsme využili vztah (3). Druhý výraz si rozepíšeme podle vzorce pro tangens součtu pro φ, čímž dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = k\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\right)\,,$$
$$\operatorname{tg}\alpha + f = k\operatorname{tg}\alpha\left(1 - f\operatorname{tg}\alpha\right)\,,$$
$$0 = fk\operatorname{tg}^2\alpha + (1-k)\operatorname{tg}\alpha + f\,,$$

kde jsme si rovnou dosadili za $\operatorname{tg}\gamma$ z (2). Řešením této kvadratické rovnice je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4f^2k}}{2fk}\,,$$

odkud už přímo díky platnosti vztahu $\operatorname{tg}\varphi = k\operatorname{tg}\alpha$ vyplývá řešení úlohy

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2f}\left(k - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4f^2k}\right)\right) =$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2f}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1\right)^2 - 4f^2\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right)\right)\,.$$

Jelikož se v zadání hledá největší možný úhel, zvolíme kořen se znaménkem plus. Po dosazení číslených hodnot vyjde $\varphi \doteq 74{,}8^\circ$. Můžeme si všimnout, že toto řešení odpovídá stabilní rovnovážné poloze. Dosazením kořene se znaménkem mínus by vyšlo labilní řešení.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha X.6 ... krutá hra osudu 5 bodů

Pan A a pan B se narodili ve stejný den a oba žijí v dystopické budoucnosti inspirované Orwellovým románem 1984. Pan A je obyčejný občan, zatímco pan B je členem užšího vedení Strany.

Ideopolicie slídí mezi běžnými občany a vymýšlí vykonstruovaná obvinění. Pan A vypozoroval, že „poločas rozpadu“ občana je 5 let a tento osud jistě jednou potká i jeho.

Nejvyšší tajemník Strany jednou za 5 let organizuje čistku, při které je vždy náhodně vybráno a odstraněno 60 % lidí z vedení Strany. To je zase osud pana B.

Jaká je pravděpodobnost, že pan A bude žít déle než pan B, jestliže právě teď skončila jedna čistka? Neuvažujte jiné příčiny úmrtí než v důsledku činnosti ideopolicie a čistek.

Jindra konečně může říct, že povinná školní četba byla užitečná.

Označme časový interval 5 let jako T. Dále nechť $a = 0{,}5$ a $b = 0{,}4$ značí poměry přeživších při jednotlivých způsobech smrti. Sousloví „poločas rozpadu“ v zadání mělo napovědět, že život běžných občanů se podobá rozpadu radioaktivních izotopů. Pravděpodobnost, že pan A umře později než v čase t, je

$$P_\mathrm{A}(t) = a^{\frac{t}{T}} \,.$$

U pana B je situace složitější, protože může umřít pouze každých 5 let. Snadno ale přijdeme na to, že pravděpodobnost, že pan B umře později než v čase t, je

$$P_\mathrm{B}(t) = b^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor} \,,$$

kde závorky $\lfloor\ \rfloor$ značí dolní celou část čísla $\frac{t}{T}$.

Zadání se nás ptá na to, jaká je pravděpodobnost, že pan A bude žít déle než pan B. Jinými slovy se ptá na pravděpodobnost, že pan B umře dřív než pan A. Abychom na toto přišli, musíme zjistit hustoty pravděpodobnosti $f_\mathrm{A}(t)$, resp. $f_\mathrm{B}(t)$ pro úmrtí pánů A a B a zintegrovat přes vhodné meze. Určitý integrál hustoty pravděpodobnosti $f_\mathrm{A}(t)$ od t_1 do t_2 udává pravděpodobnost, že pan A umře mezi časy t_1 a t_2

$$P_\mathrm{A}(t_1 < t < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_\mathrm{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \,.$$

Hustota pravděpodobnosti se spočítá jako derivace distribuční funkce. Distribuční funkce $F_\mathrm{A}(t)$ je funkcí času a je to pravděpodobnost, že pan A umře dříve než v čase t. Jinými slovy

$$F_\mathrm{A}(t) = 1 - P_\mathrm{A}(t) = 1 - a^{\frac{t}{T}} \,,$$

$$f_\mathrm{A}(t) = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\ln a}{T} a^{\frac{t}{T}} \,.$$

Hustotu pravděpodobnosti úmrtí pana B označíme $f_\mathrm{B}(t)$, ale jak se ještě později přesvědčíme, nemusíme ji vyjadřovat. Jelikož oba jevy (úmrtí pana A a úmrtí pana B) jsou nezávislé, je sdružená hustota pravděpodobnosti jednoduše součinem hustot $f_\mathrm{A}(t)$ a $f_\mathrm{B}(t)$. Pravděpodobnost, že pan A umře v intervalu t_A^1 až t_A^2 a zároveň pan B umře v intervalu t_B^1 až t_B^2, spočítáme jako

$$P(t_\mathrm{A}^1 < t_\mathrm{A} < t_\mathrm{A}^2, t_\mathrm{B}^1 < t_\mathrm{B} < t_\mathrm{B}^2) = \int_{t_\mathrm{A}^1}^{t_\mathrm{A}^2} \int_{t_\mathrm{B}^1}^{t_\mathrm{B}^2} f_\mathrm{A}(\tau_\mathrm{A}) f_\mathrm{B}(\tau_\mathrm{B})\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{B}\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{A} \,. \tag{4}$$

Pravděpodobnost, že pan B umře dříve než pan A za předpokladu, že pan A umře v čase τ_A, je funkcí proměnné τ_A a je to

$$P_\mathrm{B}(0 < t_\mathrm{B} < \tau_\mathrm{A}) = \int_0^{\tau_A} f_\mathrm{B}(\tau_\mathrm{B})\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{B} = 1 - b^{\left\lfloor \frac{\tau_\mathrm{A}}{T} \right\rfloor}\,,$$

neboli jedna mínus pravděpodobnost, že pan B bude v čase τ_A ještě naživu. Abychom dostali celkovou pravděpodobnost, že pan A bude žít déle než pan B, musíme tento výsledek dosadit do vztahu (4) a zintegrovat přes všechny možné časy τ_A

$$\begin{aligned} P(t_\mathrm{A} > t_\mathrm{B}) &= \int_0^\infty f_\mathrm{A}(\tau_\mathrm{A}) \int_0^{\tau_\mathrm{A}} f_\mathrm{B}(\tau_\mathrm{B})\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{B}\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{A} = \int_0^\infty f_\mathrm{A}(\tau_\mathrm{A}) \left(1 - b^{\left\lfloor \frac{\tau_\mathrm{A}}{T} \right\rfloor}\right) \mathrm{d}\tau_\mathrm{A} = \\ &= \int_0^\infty f_\mathrm{A}(\tau_\mathrm{A})\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{A} + \frac{\ln a}{T} \int_0^\infty a^{\frac{\tau_\mathrm{A}}{T}} b^{\left\lfloor \frac{\tau_\mathrm{A}}{T} \right\rfloor}\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{A}\,. \end{aligned}$$

Opravdu jsme nepotřebovali odvodit tvar funkce $f_\mathrm{B}(t)$.[2] První integrál je z definice roven jedné. Dále využijeme toho, že $b^{\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor}$ je v určitých intervalech konstantní, takže druhý integrál můžeme přepsat na nekonečnou sumu

$$\begin{aligned} P(T_\mathrm{A} > T_\mathrm{B}) &= 1 + \frac{\ln a}{T} \sum_{i=0}^\infty b^i \int_{iT}^{(i+1)T} a^{\frac{\tau_\mathrm{A}}{T}}\,\mathrm{d}\tau_\mathrm{A} = 1 + \sum_{i=0}^\infty b^i \left(a^{i+1} - a^i\right) = \\ &= 1 + (a-1) \sum_{i=0}^\infty (ab)^i = 1 + \frac{a\ -1}{1-ab} = \frac{a\,(1-b)}{1-ab} = \frac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že pan A přežije déle než pan B, je 3/8.

Výše uvedený postup je sice správný, ale zbytečně zdlouhavý. V podstatě jsme použili „kanón na vrabce“. Takový postup by byl adekvátní, pokud by pravděpodobnostní rozdělení pro úmrtí pana B bylo skutečně spojité. Protože je ale diskrétní, můžeme zvolit rychlejší postup. Pravděpodobnost, že pan B umře při n-té čistce ($n = 1$ odpovídá čistce ode dneška za pět let) je

$$P_\mathrm{B}(n) = b^{n-1} - b^n\,.$$

Pravděpodobnost, že pan A umře až poté, co proběhne n-tá čistka, je

$$P_\mathrm{A}(n) = a^{\frac{nT}{T}} = a^n\,,$$

takže složená pravděpodobnost, že pan B umře při n-té čistce a pan A umře až poté, je násobkem obou výše odvozených pravděpodobností (oba jevy jsou nezávislé)

$$P(n) = \left(b^{n-1} - b^n\right) a^n = \frac{1-b}{b} (ab)^n\,.$$

Pokud chceme zjistit celkovou pravděpodobnost, že pan A přežije déle než pan B, musíme spočítat sumu přes všechna n

$$P(T_\mathrm{A} > T_\mathrm{B}) = \frac{1-b}{b} \sum_{n=1}^\infty (ab)^n = \frac{1-b}{b} \left(\frac{1}{1-ab} - 1\right) = \frac{a\,(1-b)}{1-ab} = \frac{3}{8}\,.$$

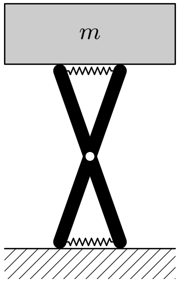
[2] Pokud by vás to zajímalo, tak hustota pravděpodobnosti pro úmrtí pana B by se dala vyjádřit pomocí delta funkcí $f_\mathrm{B}(t) = (1-b)\sum_{i=1}^\infty b^{i-1}\delta(t - iT)$.

Došli jsme ke stejnému výsledku mnohem rychleji. Pravděpodobnost, že pan A přežije déle než pan B, je 3/8.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha X.7 ... zákeřnější X

5 bodů



Na obrázku jsou dvě tyče délky $l = 1{,}2\,\mathrm{m}$ spojené uprostřed tak, že se mohou vůči sobě volně otáčet. Protější vrcholy tyčí jsou spojeny dvěma pružinkami s tuhostí $k = 90\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a klidovou délkou $s = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Na konstrukci shora položíme závaží o hmotnosti $m = 7\,\mathrm{kg}$. Jaký je rozdíl nejvyšší a nejnižší stabilní polohy, ve kterých se těleso může nacházet? Polohu úplně na zemi neuvažujte. Koeficient tření mezi tyčemi a tělesem i tyčemi a zemí je $f = 0{,}6$. Předpokládejte, že se konstrukce nemůže převrátit, je v porovnaní se závažím zanedbatelné hmotnosti a závaží je delší než tyče.

Jáchym se nudil ještě víc.

V rovnovážné poloze je celkový moment sil působících na každou z tyčí nulový. Rozmezí možných rovnovážných poloh bude způsobeno tím, že třecí síla nemá jednu konkrétní velikost, ale je právě tak velká, aby se těleso nepohybovalo.

Označme délku pružinky po natažení $2x$, počáteční délku $2x_0 = s$, výšku konstrukce $2y$ a délku tyčí $2r = l$. Síla pružnosti, působící na konec tyče, bude $F_x = 2k(x - x_0)$, zatímco tíhová resp. tlaková síla podložky bude $F_y = mg/2$. Třecí síla bude z intervalu $\langle -F_\mathrm{t}, F_\mathrm{t}\rangle$, kde $F_\mathrm{t} = fF_y$. Pro celkový moment v maximální resp. minimální poloze platí

$$xF_y - y\left(F_x + zF_\mathrm{t}\right) = 0\,,$$

kde $z \in \langle -1, 1\rangle$. Dosazením z výše uvedených velikostí sil dostáváme

$$xmg - y\left(4k\left(x - x_0\right) + zfmg\right) = 0\,.$$

Zřejmě platí $r^2 = x^2 + y^2$, odkud si můžeme vyjádřit x jako funkci y. Nicméně už od pohledu je jasné, že výsledný vztah bude polynom vysokého stupně, který nemá smysl řešit analyticky. Proto zvolíme jiný přístup – vyjádříme si z jako funkci y a budeme se se zajímat o to, v kterých bodech je splněna podmínka $z \in \langle -1, 1\rangle$. Platí

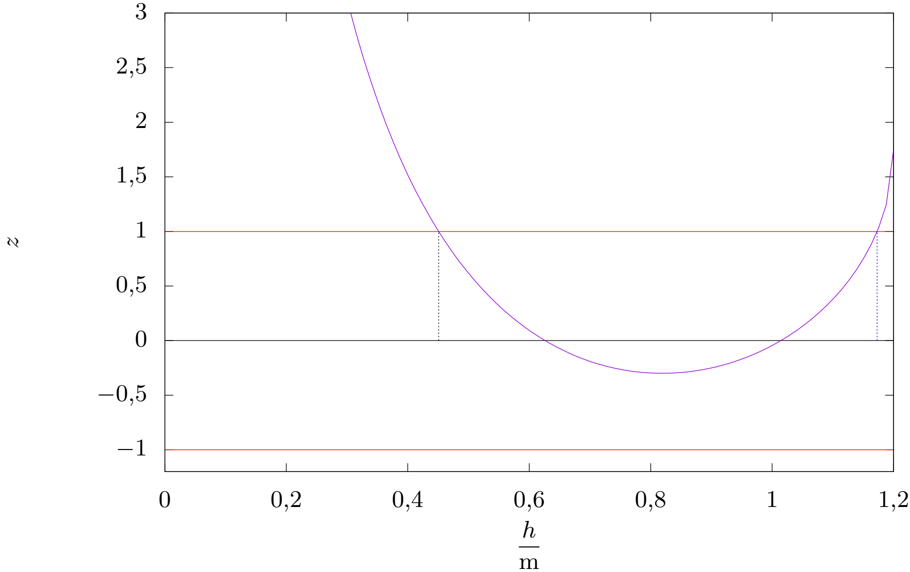
$$z = \frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{r^2}{y^2} - 1} - \frac{4k}{mg}\left(\sqrt{r^2 - y^2} - x_0\right)\right) = \frac{1}{f}\left(\sqrt{\frac{l^2}{h^2} - 1} - \frac{2k}{mg}\left(\sqrt{l^2 - h^2} - s\right)\right)\,,$$

kde jsme si rovnou zavedli hledanou výšku jako $h = 2y$. Závislost $z(h)$ jsme zobrazili do grafu 3. Minimální a maximální výška jsou

$$h_1 \doteq 0{,}451\,\mathrm{m}\,,$$
$$h_2 \doteq 1{,}173\,\mathrm{m}\,.$$

Výsledkem úlohy je $\Delta h = h_2 - h_1 \doteq 0{,}722\,\mathrm{m}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz



Obr. 3: Závislost $z(h)$. Vodorovné čáry označují interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Úloha A.1 ... útěk před sluncem 5 bodů

Jakou rychlostí se musí pohybovat letadlo vůči povrchu Země, pokud letí ve výšce $h = 10\,\mathrm{km}$ přímo po 42. rovnoběžce a přitom utíká před východem slunce (takže je vždy nad místem, kde slunce právě vychází)? *Danka letěla letadlem a za nimi vycházelo slunce.*

Ak sa zamyslíme nad situáciou, uvedomíme si, že lietadlo sa musí nachádzať vždy v rovnakom bode voči stredu Zeme a Slnku. Potom sa lietadlo voči povrchu Zeme pohybuje takou rýchlosťou, akou sa povrch Zeme na danej zemepisnej šírke pohybuje voči stredu Zeme a Slnku. Túto rýchlosť môžeme určiť ako podiel obvodu Zeme o v tejto zemepisnej šírke (teda dĺžky 42. rovnobežky) a periódy jednej otočky Zeme $T = 24\,\mathrm{h}$ relatívne voči Slnku. Dĺžku rovnobežky spočítame ako $o = 2\pi r$, kde r je polomer príslušnej rovnobežky. Ten môžeme jednoducho spočítať zo znalosti polomeru Zeme $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ ako

$$r = R_\mathrm{Z} \cos\alpha\,,$$

kde α je uhol medzi rovníkom a danou rovnobežkou, ktorý je zo zadania $42\,^\circ$. Potom pre rýchlosť pohybu povrchu Zeme na 42. rovnobežke voči lietadlu utekajúcemu pred východom slnka dostávame

$$v = \frac{o}{T} = \frac{2\pi R_\mathrm{Z}\cos\alpha}{T}\,,$$

čo nám po dosadení číselných hodnôt dáva

$$v \doteq 1\,240\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha A.2 ... SETI frekvence 5 bodů

SETI je projekt vyhledávající známky mimozemských civilizací zkoumáním rádiových signálů přicházejících z vesmíru. V roce 1973 astronomy Drakea a Sagana napadlo, že by mohlo být zajímavé hledat na nějaké „přírodní frekvenci“. Konkrétně navrhli, aby se jednalo o kombinaci Boltzmannovy konstanty k_B, Planckovy konstanty h a současné teploty reliktního záření $T_0 = 2{,}725\,\mathrm{K}$. Nalezněte vztah pro frekvenci záření f využívající tyto konstanty s předpokladem, že nejsou násobeny nějakým dalším bezrozměrným číslem. Jak vychází tato hodnota číselně? *Karel četl knížku o hledání mimozemšťanů.*

Jde o úlohu na rozměrovou analýzu. Kombinace je sice tak jednoduchá, že jde docela rychle odhadnout i po troše přemýšlení, my ale zvolíme systematický postup pomocí řešení soustavy rovnic. Víme, že má platit

$$f = k_\mathrm{B}^\alpha \cdot h^\beta \cdot T_0^\gamma\,.$$

Mocniny si musí odpovídat i u jednotek veličin. Jednotky převedeme na základní a sestavíme rovnice pro každou jednotku (kg, m, s a K)

$$\mathrm{Hz} = \left(\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}\right)^\alpha \cdot (\mathrm{J{\cdot}s})^\beta \cdot (\mathrm{K})^\gamma\,,$$
$$\mathrm{s^{-1}} = \left(\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}\right)^\alpha \cdot \left(\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\right)^\beta \cdot (\mathrm{K})^\gamma\,,$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha + \beta\,,\\
0 &= 2\alpha + 2\beta\,,\\
-1 &= -2\alpha - \beta\,,\\
0 &= -\alpha + \gamma\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že nám vyšly čtyři rovnice pro čtyři jednotky, ale máme pouze tři neznámé. Je tedy dobře, že první dvě rovnice jsou stejné. Soustavu vyřešíme a dostáváme $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a $\gamma = 1$ (zkontrolujte dosazením). Hledaný vztah pro frekvenci je

$$f = \frac{k_\mathrm{B} T_0}{h} \doteq 56{,}78\,\mathrm{GHz}\,.$$

„Přirozená frekvence" je 56,78 GHz, což odpovídá vlnové délce zhruba 5,3 mm ve vakuu.

Je zajímavostí, že takto určená frekvence je univerzální za předpokladu, že v okamžiku vzniku reliktního záření byla teplota vesmíru dostatečně homogenní a rozpínání vesmíru probíhá homogenně a izotropně. Což se zdá, že pro přesnost, kterou jsme použili, skutečně platí. Vlivem rozpínání vesmíru se s časem frekvence sice snižuje, ale současně s tím se úměrně snižuje teplota reliktního záření měřená daným pozorovatelem. Vyšleme-li tedy signál na této „přirozené frekvenci", tak se sice s časem jeho frekvence sníží, ale pozorovatel sledující na „přirozené frekvenci" odpovídající jeho času pozorování tak může tuto frekvenci snadno správně identifikovat.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha A.3 ... gravitace v seriálu The Orwille — 5 bodů

Isaac, postava seriálu The Orwille, tvrdí o planetě Kaylon 1, že má obvod $o = 57\,583\,\mathrm{km}$, průměrnou hustotu $\rho = 4{,}42\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a gravitaci 1,13krát vyšší než na Zemi. Uvažujme, že tím myslí gravitační zrychlení na povrchu planety a používejme pro výpočet hodnotu $a_\mathrm{g} = 11{,}11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Jaká je zde hodnota gravitační konstanty za předpokladu, že je planeta kulová a homogenní a fyzikální vztahy fungují v tomto světě stejně jako v našem?

Karel se díval na The Orwille.

Začněme u vztahu pro velikost gravitačního zrychlení na povrchu planety

$$a_\mathrm{g} = G\frac{M}{R^2}\,, \tag{5}$$

kde G je gravitační konstanta, kterou chceme určit, M je hmotnost planety a R je její poloměr. Hmotnost homogenní koule můžeme snadno vypočítat pomocí vztahu

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3\,,$$

kde V je objem koule. Dále chceme vyjádřit G pomocí obvodu a ne poloměru Země, pro které platí vztah $o = 2\pi R$. Dosadíme vše do rovnice (5) a postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
G = a_\mathrm{g}\frac{R^2}{M} = a_\mathrm{g}\frac{R^2}{\frac{4}{3}\rho\pi R^3} = a_\mathrm{g}\frac{3}{4\pi\rho R} &=\\
= \frac{3}{2}\frac{a_\mathrm{g}}{\rho o} \doteq 6{,}55\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}\,.
\end{aligned}
$$

Gravitační konstanta by v takovém vesmíru měla hodnotu $6{,}55 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$. Gravitace je v tomto světě zhruba o 2 % slabší.

Je zajímavým poznatkem, že se v našem vztahu nevyskytlo číslo π, které bychom mohli čekat. Takže i kdyby bylo v tomto vesmíru jiné π, ale základní fyzikální (středoškolské) vztahy by fungovaly stejně, tak bychom nepoznali na výsledku rozdíl.

Neuvažovali jsme případné odchylky, za které by mohla například teorie obecné relativity, ale protože nejde o silné gravitační pole, můžeme předpokládat, že i v tomto vesmíru jde o zanedbatelné jevy.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha A.4 ... Měsíček srpeček — 5 bodů

Jaký prostorový úhel na obloze zaujímá osvětlená část Měsíce, pokud je vidět v úhlové vzdálenosti (elongaci) $\alpha = 30^\circ$ od Slunce? Úhlový průměr Měsíce na obloze je $\theta = 0{,}52^\circ$.

Matěj se zasněně díval na Měsíc.

Uvažujeme, že Měsíc je daleko od Země a že Slunce je dostatečně daleko od Měsíce. Vzhledem k tomu, že úhlový průměr Měsíce je malý, můžeme snadno spočítat prostorový úhel Ω_0, který na obloze zabírá (včetně jeho neosvětlené části) pouze jako obsah kružnice o průměru θ

$$\Omega_0 = \frac{\pi\theta^2}{4}\,.$$

Nyní je třeba zjistit, jaká čast z viditelné strany měsíce je osvětlená. Rozhraní světlo-stín leží na hlavní kružnici (poledníku) Měsíce. Ze Země tuto kružnici pozorujeme pod úhlem a její průmět do roviny kolmé ke směru pozorování je elipsa. Z obrázku vidíme, že malá poloosa této elipsy je $b = r\sin(\beta - \pi/2) = -r\cos\beta$, kde r je poloměr Měsíce. Poměr k osvětlené části Měsíce můžeme snadno vyjádřit jako poměr viditelné osvětlené části (viz obrázek) a celkového průmětu Měsíce na směr pozorování

$$k = \frac{\frac{\pi r^2 - \pi r b}{2}}{\pi r^2} = \frac{r-b}{2r} = \frac{1+\cos\beta}{2}\,.$$

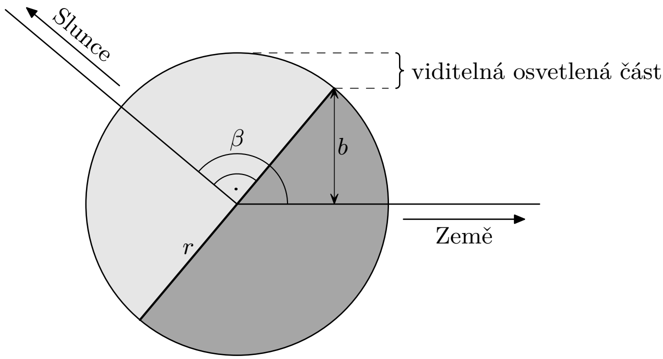
Úhel β je v našem případě úhel Země-Měsíc-Slunce. Tento úhel bychom mohli snadno spočítat pomocí kosinové věty, ale díky tomu, že Slunce je hodně daleko od Měsíce i Země, můžeme approximovat

$$\beta \approx \pi - \alpha\,.$$

Celkově pro prostorový úhel viditelné části dostáváme

$$\Omega = k\Omega_0 = \frac{1-\cos\alpha}{2}\frac{\pi\theta^2}{4} = \frac{\pi\theta^2}{8}\left(1-\cos\alpha\right) = 0{,}014\,2\,\mathrm{deg}^2 = 4{,}33\cdot 10^{-6}\,\mathrm{sr}\,.$$

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz



Úloha A.5 ... výroční kometa 5 bodů

Nedávno, přesně 20. prosince 2020, byla na obloze poprvé po dlouhých 14 letech k vidění jistá kometa. Objevila se přesně na stejném místě jako dne 20. prosince 2006, kdy se konalo vůbec první Fyziklání. Na oslavu tohoto výročí nyní spočítejte, pod jakým úhlem draha této komety protíná oběžnou dráhu Země, je-li její excentricita 0,9. Gravitační vliv Země a excentricitu její orbity neuvažujte. Kometa obíhá v rovině oběhu Země kolem Slunce.

Jardu komety fascinují.

Podle zadání se situace opakuje přesně po 14 letech, takže oběžná doba komety je 14 roků. Podle třetího Keplerova zákona je tak hlavní poloosa elipsy oběžné dráhy komety rovna $a = T^{\frac{2}{3}}$, kde perioda T je v rocích a velká poloosa a v astronomických jednotkách, tudíž $a \doteq 5{,}809\,\mathrm{AU}$. Úhel zjistíme ze zákona zachování momentu hybnosti, který v centrálním gravitačním poli platí.

Při pohybu po elipse platí i zákon zachování energie ve tvaru

$$E = -\frac{MmG}{2a}\,,$$

kde M je hmotnost centrálního tělesa (v našem případě Slunce), m hmotnost komety, G je gravitační konstanta a a je délka hlavní poloosy. Slunce se nachází v ohnisku elipsy. Z geometrie elipsy dokážeme najít vzdálenost v přísluní, tedy když je kometa nejblíže Slunci. Ta je

$$r_\mathrm{p} = a\,(1-e)\;,$$

kde $e = 0{,}90$ je excentricita oběžné dráhy komety. Nyní už ze zákona zachování energie dokážeme najít kinetickou energii komety jako

$$E_\mathrm{k} = E - E_\mathrm{p} = -\frac{MmG}{2a} - \left(-\frac{MmG}{r_\mathrm{p}}\right) = (MmG)\left(\frac{1}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{2a}\right)\,.$$

Rychlost jednoduše vyjádříme jako

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2MG}\sqrt{\frac{1}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{2a}} = \sqrt{2MG}\sqrt{\frac{1+e}{2a\,(1-e)}}\,,$$

kam jsme dosadili za r_p. Moment hybnosti má velikost

$$L = mvr\sin\alpha\,,$$

kde α je úhel, který svírá průvodič s rychlostí, která je tečnou k trajektorii. Pokud je kometa v přísluní, pak je rychlost kolmá na průvodič a moment hybnosti je tak

$$L = mv_\mathrm{p}r_\mathrm{p} = m\sqrt{MGa\left(1 - e^2\right)}\,.$$

Podobným způsobem nyní spočítejme rychlost, jakou má kometa v okamžiku, kdy protíná oběžnou dráhu Země, ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{AU}$ od Slunce. Tato rychlost je

$$v_\mathrm{z} = \sqrt{2MG}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}} = \sqrt{MG}\sqrt{\frac{2a - r}{ar}}\,.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti najdeme úhel α jako

$$\sin\alpha = \frac{v_\mathrm{p}r_\mathrm{p}}{v_\mathrm{z}r_\mathrm{z}} = \frac{\sqrt{MGa\left(1 - e^2\right)}}{r\sqrt{MG}\sqrt{\frac{2a-r}{ar}}} = \frac{a\sqrt{\left(1 - e^2\right)}}{\sqrt{r\left(2a - r\right)}}\,,$$
$$\alpha \doteq 51{,}0^\circ.$$

Tento úhel tedy svírá rychlost s průvodičem. Nás ale zajímá úhel mezi vektorem rychlosti a trajektorií Země. Ten je

$$\beta = 90^\circ - \alpha \doteq 39{,}0^\circ\,.$$

Dráha komety protíná oběžnou dráhu Země pod úhlem 39,0°.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha A.6 ... vražedné Slunce 5 bodů

Astronom zpozoroval na povrchu Slunce v blízkosti sluneční skvrny náhlé zjasnění. Tento výron koronální hmoty uvolnil proton o celkové energii $E = 1\,012\,\mathrm{MeV}$. Za jak dlouho od pozorování erupce doletí tento proton k Zemi? *Dodo chtěl pozorovat, ale byla mlha.*

Hľadaný čas je daný rozdielom doby letu častice a fotónu

$$\Delta T = \frac{l}{v} - \frac{l}{c}\,,$$

kde $l = 149{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ je vzdialenosť Zeme od Slnka. Na protón s tak vysokou energiou majú magnetické polia malý vplyv, dá sa preto predpokladať, že k Zemi letel priamo. Ďalej si môžeme overiť, že strata jeho energie vplyvom meniaceho sa gravitačného poľa je zanedbateľná. Rýchlosť protónu určíme zo vzťahu pre energiu

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

kde za pokojovú energiu m_0c^2 dosadíme pokojovú hmotnosť-energiu protónu $m_\mathrm{p} = 938{,}27\,\mathrm{MeV}$. Vyjadrením rýchlosti a dosadením do vzťahu pre čas dostaneme

$$\Delta T = \frac{l}{c}\left(\frac{c}{v} - 1\right) = \frac{l}{c}\left[\left(1 - \frac{m_\mathrm{p}^2}{E^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] \doteq 833\,\mathrm{s}\,.$$

Od pozorovania záblesku častica doletí k Zemi asi o štvrťhodinu.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha C.1 ... nedokonalý ampérmetr 5 bodů

Mějme rezistor s odporem $R = 100\,\Omega$. Do série k němu připojíme ampérmetr a paralelně k nim ideální voltmetr. Toto zapojení připojíme ke zdroji stejnosměrného napětí. Ampérmetr ukáže proud $I = 12\,\mathrm{mA}$, voltmetr napětí $U = 1{,}3\,\mathrm{V}$. Určete vnitřní odpor ampérmetru.

Legolas měřil v praktiku odpory.

Ampérmeter je pripojený sériovo k rezistoru a I je teda skutočne prúd idúci rezistorom. Napätie na rezistore tak zrejme bude $U_\mathrm{r} = IR$.

Lenže voltmeter je zapojený paralelne k sériovému zapojeniu rezistora a ampérmetra, teda napätie na ňom je súčet napätí na týchto dvoch súčiastkach

$$U = U_\mathrm{r} + U_\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{a} = U - U_\mathrm{r}\,,$$

čiže máme napätie na ampérmetri.

Zostáva si uvedomiť, že aj ampérmetrom tečie prúd I a že aj preň platí Ohmov zákon, z ktorého si vyjadríme jeho odpor

$$R_\mathrm{a} = \frac{U_\mathrm{a}}{I} = \frac{U - U_\mathrm{r}}{I} = \frac{U - IR}{I} = \frac{U}{I} - R \doteq 8{,}3\,\Omega\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha C.2 ... kvádříky 5 bodů

Kiko našel ve své staré krabici pět stejných vodivých kvádrů s délkami hran $a = 5{,}0\,\mathrm{cm}$, $b = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ a $c = 3{,}0\,\mathrm{cm}$. Všechny měly měrný elektrický odpor roven $\rho = 1{,}21\cdot 10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. Postupně tyto kvadříky zapojoval a měřil celkový odpor obvodu, který z nich sestavil. Jaká byla nejnižší hodnota odporu, kterou naměřil, pokud vždy použil všech pět kvádrů? Kvádry do obvodu vždy připojoval pomocí dvou rovnoběžných vodivých desek, které se nedotýkají.

Kiko si hrál s kostkami.

Najmenší odpor jedného kvádra získame, keď prúd preteká čo najširšou časťou po čo najkratšej dráhe. Pri porovnaní jednotlivých kombinácii možného otočenia kvádra zistíme, že najmenší odpor je rovný

$$R_\mathrm{min} = \rho \frac{c}{ab}\,.$$

Riešenie ideálneho zapojenia pre dosiahnutie najmenšieho odporu je už jednoduché. Stačí ich zapojiť všetky paralelne, čím dostávame rovnicu pre celkový odpor zapojenia

$$\frac{1}{R_c} = \frac{5}{R_\mathrm{min}}\,.$$

Invertovaním vzťahu dostávame výsledok

$$R_c = \frac{R_\mathrm{min}}{5} = 3{,}63\cdot 10^{-6}\,\Omega\,.$$

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha C.3 ... cívky 5 bodů

Káťa se snažila udělat cívku s co největší indukčností, ale zároveň chtěla zredukovat ohmické ztráty. Původní válcovu cívku o poloměru $r_0 = 2\,\mathrm{cm}$ a $N_0 = 100$ závitech, které byly těsně u sebe a nepřekrývaly se, přemotala na válcovou cívku o poloměru $r_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Použila celý drát a závity nové cívky se také nepřekrývaly a byly těsně u sebe. O kolik procent se zvětšila indukčnost? *Káťa chtěla studentský projekt na tokamaku a nakonec motala cívky.*

Pre indukčnosť cievky v tvare dlhého solenoidu (teda husto navinutého valca) platí známy vzťah

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l}\,,$$

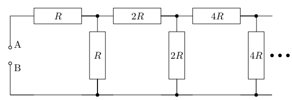
kde l je jeho dĺžka, S je prierez a μ je permeabilita prostredia, pre cievku bez jadra môžeme uvažovať permeabilitu vákua. Pre pomer indukčností potom máme

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{\mu N_1^2 \pi r_1^2 l_0}{\mu N_0^2 \pi r_0^2 l_1} = \left(\frac{N_1 r_1}{N_0 r_0}\right)^2 \frac{l_0}{l_1} = 2\,,$$

kde sme využili, že $N_1 r_1 = N_0 r_0$ je úmerná celkovej dĺžke drôtu a fakt, že dĺžka cievky je úmerná počtu závitov. Cievka s dvakrát väčším polomerom bude mať polovičný počet závitov a teda aj polovičnú dĺžku. Indukčnosť cievky sa tak zdvojnásobí, teda narastie o 100 %. Mohlo by sa zdať, že takto môžeme postupovať donekonečna a zvyšovať indukčnosť cievky, ale v skutočnosti bude klesať pomer dĺžky cievky k jej priemeru a vzťah na začiatku riešenia prestane platiť.

Kateřina Charvátová
`katerina.charvatova@fykos.cz`

Úloha C.4 ... nekonečná a odporná síť 5 bodů



Na obrázku vidíte část nekonečné rezistorové sítě. Odpory rezistorů v ní jsou členy geometrické řady. Jinak řečeno, v prvním bloku mají odpor R, v druhém $2R$ a vždy následující blok má odpory s dvojnásobkem předchozích. Jaký je celkový odpor mezi svorkami A a B v násobcích R? *Karel varioval úlohy na nekonečné sítě.*

V nekonečných rezistorových sítích je „trikem" nalezení opakujícího se vzoru a následné sestavení vhodné rovnice, ze které dostaneme, snad snadno, požadovaný výsledný odpor R_∞. V našem případě si můžeme všimnout, že pokud odebereme první dva odpory, dostáváme velice podobnou síť. Liší se pouze tím, že každý jeden rezistor má dvojnásobný odpor. Tím pádem je ale jasné, že celá síť bude mít dvojnásobný odpor $2R_\infty$. Zjednodušeně si můžeme zakreslit síť dvěma ekvivalentními způsoby, jak můžete vidět na obrázku 4. Sestavíme rovnici

$$R_\infty = R + \frac{2RR_\infty}{R + 2R_\infty}\,.$$

Snadno ji převedeme na kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme

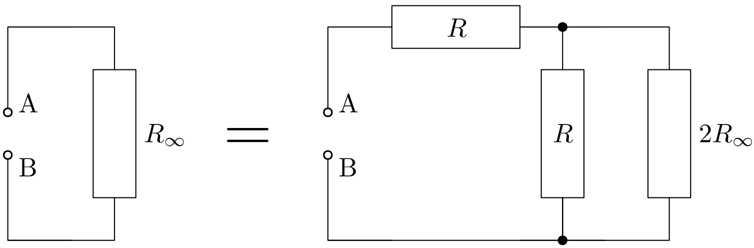
$$RR_\infty + 2R_\infty^2 = R^2 + 2RR_\infty + 2RR_\infty\,,$$

$$0 = 2R_\infty^2 - 3RR_\infty - R^2\,,$$

$$R_\infty^\pm = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 + 8R^2}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} R\,.$$

Fyzikálně korektní řešení je to s kladným znaménkem. Záporné řešení by znamenalo záporný odpor. Jediným řešením úlohy tak je, že celkový odpor nekonečné rezistorové sítě je

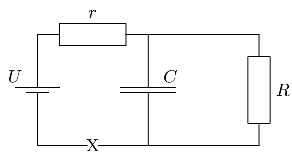
$$R_\infty = \frac{3+\sqrt{17}}{4} R \doteq 1{,}78\, R\,.$$



Obr. 4: Dvě alternativní zapojení rezistorů.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha C.5 ... dlouhé vedení 5 bodů



Mějme spotřebič připojený ke zdroji stejnosměrného napětí $U_0 = 120\,\mathrm{V}$ *pomocí dlouhého drátu. Vzhledem k blízkosti vodičů vytvoříme pro obvod schéma zapojení, které můžete vidět na obrázku. Rezistor R představuje spotřebič, rezistor* $r \ll R$ *představuje odpor vedení a* $C = 420\,\mathrm{nF}$ *jeho kapacitu. V místě označeném X dochází kvůli špatnému kontaktu periodicky k rozpojování a zapojování obvodu, přičemž oba stavy trvají stejně dlouho* $T = 0{,}001\,\mathrm{s}$*. Určete, jaký výkon bude dodávat zdroj po dlouhé době po zapojení obvodu. V případě stálého připojení by výkon zdroje byl* $P_0 = 30\,\mathrm{W}$*.* *Dodo bojoval s prodlužovačkou.*

Vyriešme najprv priebeh prúdu v obvode. Z Kirchhoffových zákonov máme, že prúd I cez batériu a odpor r je rovný súčtu prúdov I_C a I_R cez kondenzátor, resp. cez spotrebič. Ďalej máme, že napätie na spotrebiči je rovné napätiu na kondenzátore, čo môžeme vyjadriť ako

$$RI_R = U_C\,.$$

Deriváciou tohto vzťahu podľa času dostávame vzťah s použitím definície kapacity $C\,\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q$

$$RC\dot{I}_R = I_C\,,$$

kde bodka nad I_R značí deriváciu podľa času. Posledným základným vzťahom, ktorý budeme používať je vzťah pre rozdelenie napätia zdroja medzi rezistory

$$U_0 = rI + RI_R\,.$$

Vyriešme najprv prípad, keď je obvod v bode X prerušený a kondenzátor sa cez spotrebič vybíja. Pre prúd zdrojom máme $I = 0$, teda $I_R = -I_C$ a

$$-RC\dot{I}_C = I_C\,.$$

Riešením tejto rovnice je klesajúca exponenciála

$$I_C^{\mathrm{v}}(t) = I_C^{\mathrm{v}}(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

V období, keď je zdroj pripojený, dosadením pre rozdelenie prúdov do rozdelenia napätí, dostávame

$$RI_R + rI_C + rI_R = U_0\,,$$

z čoho deriváciou podľa času a dosadením vzťahu pre kapacitu kondenzátora máme

$$\frac{R+r}{RC} I_C + r\dot{I}_C = 0\,,$$

čo má opäť riešenie klesajúcu exponenciálu

$$I_C^{\mathrm{z}} = I_C^{\mathrm{z}}(0)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{t}{RC}}\,.$$

Nasledujúcim krokom je tieto riešenia na seba naviazať. V okamihu zmeny stavu pripojenia zdroja sa na kondenzátore nemení napätie skokovo, vystupuje totiž napríklad vo vzťahu pre uloženú energiu v kondenzátore. Napätie na kondenzátore je ale „merané“ na spotrebiči a skokovo sa teda nezmení ani prúd I_R. V okamihu vypnutia musí byť splnený vzťah

$$I_R^{\mathrm{z}}(T) = I_R^{\mathrm{v}}(0)\,,$$

v okamihu zapnutia

$$I_R^{\mathrm{v}}(T) = I_R^{\mathrm{z}}(0)\,.$$

Pre vyjadrenie prúdu odporom využijeme vyššie odvodené vzťahy

$$I_R^{\mathrm{v}} = -I_C^{\mathrm{v}}\,,$$

$$I_R^{\mathrm{z}} = \frac{U_0 - rI_C^{\mathrm{z}}}{R+r}\,.$$

Dosadením riešenia do predchádzajúcich vzťahov dostávame sústavu rovníc pre $I_C^{\mathrm{v}}(0)$ a $I_C^{\mathrm{z}}(0)$

$$\frac{U_0}{r} + \frac{R+r}{r} I_C^{\mathrm{v}}(0) = I_C^{\mathrm{z}}(0)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{T}{RC}}\,,$$

$$I_C^{\mathrm{z}}(0) = \frac{U_0}{r} + \frac{R+r}{r} I_C^{\mathrm{v}}(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\,.$$

Súčtom týchto rovníc dostávame vzťah vyjadrujúci zachovanie náboja - to čo sa počas nabíjania nabije, sa počas vybíjania vybije v tvare

$$\frac{R+r}{r} I_C^{\mathrm{v}}(0)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\right) = -I_C^{\mathrm{z}}(0)\left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{T}{RC}}\right)\,.$$

Priamym dosadením druhej rovnice do prvej dostávame

$$I_C^{\mathrm{v}}(0) = -\frac{U_0}{R+r}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{R+r}{r}\frac{T}{RC}}}{1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+2\right)\frac{T}{RC}}}\,,$$

a využitím predchádzajúceho vzťahu

$$I_C^{\mathrm{z}}(0) = \frac{U_0}{r} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}}{1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+2\right)\frac{T}{RC}}}\,.$$

Vidíme, že vybíjací prúd má záporné znamienko, čo zodpovedá našej voľbe smerov prúdu v obvode. Týmto máme obvod plne vyriešený a zostáva nám odpovedať na otázku zo zadania.

Práca vykonaná zdrojom za jednu periódu spínania je daná ako

$$W = \int_0^T U_0 I^{\mathrm{z}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T U_0 I^{\mathrm{v}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T U_0 I^{\mathrm{z}}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Prúd batériou použijeme v tvare

$$I^{\mathrm{z}} = I_C^{\mathrm{z}} + I_R^{\mathrm{z}} = I_C^{\mathrm{z}} + \frac{U_0 - rI_C^{\mathrm{z}}}{R+r} = \frac{U_0 + RI_C^{\mathrm{z}}}{R+r}\,,$$

čo nám dáva

$$\begin{aligned} W &= \frac{U_0}{R+r} \int_0^T \left(U_0 + RI_C^{\mathrm{z}}(0)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{t}{RC}}\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{U_0}{R+r}\left[U_0 t - \left(\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{1}{RC}\right)^{-1} RI_C^{\mathrm{z}}(0)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{t}{RC}}\right]_0^T = \\ &= \frac{U_0}{R+r}\left(U_0 T + \frac{rR^2C}{R+r} I_C^{\mathrm{z}}(0)\left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{T}{RC}}\right)\right) = \\ &= \frac{U_0^2}{R+r}\left(T + \frac{R^2C}{R+r}\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{T}{RC}}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+2\right)\frac{T}{RC}}}\right)\,. \end{aligned}$$

Pre priemerný výkon obvodu tak s využitím $P_0 = \frac{U_0^2}{R+r}$ dostávame

$$P = \frac{W}{2T} = \frac{P_0}{2}\left(1 + \frac{R^2C}{T(R+r)}\frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+1\right)\frac{T}{RC}}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{r}+2\right)\frac{T}{RC}}}\right)\,.$$

Ak použijeme zanedbanie r, teda $R \gg r$, dostaneme vzťah o niečo krajší

$$P \approx \frac{P_0}{2}\left(1 + \frac{RC}{T}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{RC}}\right)\right)\,,$$

pričom môžeme vidieť, že sa táto hodnota pohybuje medzi $P_0/2$ pre RC/T malé až po P_0 pre RC/T idúce do nekonečna. Pre malú kapacitu a veľký čas spínania sa tak obvod chová, akoby v ňom kondenzátor nebol, naopak pre vysokú kapacitu a malú dobu spínania sa obvod chová, akoby bol stále zapnutý. Toto je bežná aplikácia kondenzátorov – totiž preklenutie krátkeho výpadku napájacieho napätia. Taktiež vidíme, že tento výkon nezávisí na odpore vedenia, ak je tento odpor v porovnaní s odporom spotrebiča malý. Toto zanedbanie sme mohli samozrejme využiť na vhodných miestach už počas výpočtu. Z výkonu a napätia v stále zapojenom prípade máme odpor spotrebiča

$$R \approx \frac{U_0^2}{P_0}\,,$$

čo po dosadení dáva výkon

$$P = \frac{P_0}{2} + \frac{U_0^2 C}{2T}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{P_0 T}{U_0^2 C}}\right) \doteq 18{,}0\,\mathrm{W}\,.$$

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Úloha O.1 ... tleskáme na koncertě 5 bodů

Na koncertě jsou diváci v aréně hluboké $l = 200\,\mathrm{m}$ (vzdálenost od první k poslední řadě diváků). Frontman kapely je povzbuzuje k tleskání gestem, které je v publiku vidět i díky velkoplošné obrazovce. Najděte nejvyšší možný počet tlesknutí za minutu, aby jednotlivé tlesky kapele nesplývaly. *Dodo poslouchal ozvěnu z Výstaviště.*

Diváci tleskají naráz (rozdíly způsobené konečnou rychlostí světla můžeme s klidem zanedbat), ale zvuku jistou dobu trvá, než se ke kapele dostane. Tento čas můžeme určit pomocí rychlosti zvuku $c = 343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a vzorce

$$t = l/c \doteq 0{,}59\,\mathrm{s}\,.$$

Je tedy možné, aby publikum tleskalo frekvencí až

$$f = \frac{1}{t} = \frac{c}{l} \doteq 103\,\mathrm{min}^{-1}\,,$$

čili přibližně stokrát za minutu.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha O.2 ... bublina v ledu 5 bodů

Jindra zkoumal ledovou plochu. Zaujala ho jedna bublinka, jež se ve skutečnosti nachází $a = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ pod povrchem ledu. Rozdílné indexy lomu ledu a vzduchu zkreslují vzdálenosti. V jaké hloubce vnímají bublinu Jindrovy oči, jestliže se Jindra dívá podél nejkratší spojnice bublina-povrch ledu? Index lomu ledu je $n_\mathrm{l} = 1{,}31$, index lomu vzduchu je $n_\mathrm{v} = 1{,}00$. *Někdo bruslí, Jindra zkoumá bublinky.*

Paprsky, jež vycházejí z bubliny, se na rozhraní led-vzduch budou lámat od kolmice, takže Jindrovi se bude bublina zdát blíže než ve skutečnosti. Budeme pracovat v aproximaci pro malé úhly.[3] Označme h vzdálenost od spojnice oko-bublina k místu, kde paprsek protíná povrch ledu. V něm svírá paprsek s kolmicí úhel $\varphi_\mathrm{l} = h/a$, zatímco na vzduchu se láme pod úhlem $\varphi_\mathrm{v} = h/a'$, kde a' je hledaná zdánlivá vzdálenost pod povrchem, kterou vnímá oko. Úhly φ_l a φ_v jsou svázány Snellovým zákonem

$$n_\mathrm{l}\varphi_\mathrm{l} = n_\mathrm{v}\varphi_\mathrm{v}\,,$$

takže můžeme napsat

$$\varphi_\mathrm{v} = \frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{v}}\varphi_\mathrm{l} = \frac{n_\mathrm{l}}{n_\mathrm{v}}\frac{h}{a}\,,$$

$$a' = \frac{h}{\varphi_\mathrm{v}} = \frac{n_\mathrm{v}}{n_\mathrm{l}}a \doteq 3{,}05\,\mathrm{cm}.$$

Jindrovi se zdá, že bublina je v hloubce $a' \doteq 3{,}05\,\mathrm{cm}$.

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

[3] V limitě $\varphi \to 0$ lze psát $\sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi = \varphi$.

Úloha O.3 ... na koncertě 5 bodů

Danka s Danem stáli na rockovém koncertě ve vzdálenosti $r_1 = 60\,\mathrm{m}$ od reproduktoru a slyšeli hudbu s hladinou akustického tlaku $L_1 = 80\,\mathrm{dB}$. O kolik decibelů víc slyšeli lidé pod pódiem stojící ve vzdálenosti $r_2 = 10\,\mathrm{m}$ od reproduktoru? Danka s Danem byli na koncertě.

Fyzikálna veličina, ktorá udáva silu zvuku, akú ľudia počujú, je hladina akustického tlaku L. Táto veličina je definovaná ako

$$L = 20 \log \frac{p}{p_0}$$

v jednotkách decibel. Veličina p je tlak zvukovej vlny v danom mieste a $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa}$ je prah počutia. Tlak je priamo úmerný pôsobiacej sile F. Táto sila je priamo úmerná výchylke, a teda aj amplitúde I, ktorá je úmerná odmocnine z hustoty toku energie vlnenia ρ_E. Z predpokladu o konštantnom výkone reproduktorov je energia tečúca každou guľovou vrstvou, v ktorej strede sa nachádza reproduktor, rovnaká nezávisle na polomere vrstvy r. Hustota toku energie je teda nepriamo úmerná povrchu sféry S, pre ktorú platí $S = \pi r^2$. Matematicky zapísané

$$p \propto F \propto I \propto \sqrt{\rho_E} \propto \sqrt{S^{-1}} \propto r^{-1}\,.$$

Pre pomer tlakov vo dvoch rôznych vzdialenostiach potom platí

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_1}{r_2}\,.$$

Hľadaný rozdiel hlasitostí už určíme jednoducho ako

$$L_2 - L_1 = 20 \left(\log \frac{p_2}{p_0} - \log \frac{p_1}{p_0} \right) = 20 \log \frac{p_2}{p_1} = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \doteq 16\,\mathrm{dB}\,.$$

Ľudia pod pódiom počujú koncert s hlasitosťou o $16\,\mathrm{dB}$ vyššou.

Daniela Pittnerová
`daniela@fykos.cz`

Úloha O.4 ... zvonečky 5 bodů

Vedle nekonečné zdi stojí ve vzdálenosti $h = 100\,\mathrm{m}$ velký kostel. Jeho zvony zvoní s periodou $T_0 = 1{,}00\,\mathrm{s}$. Jak Kiko v zimě mrzne, potuluje se v konstantní vzdálenosti od kostela l a štve ho, že někdy slyší ozvěnu po zaznění hlavního zvonu později než jindy. Pomozte mu zjistit, v jaké minimální vzdálenosti od kostela by musel být, aby spolu s ozvěnou mohl slyšet zvonění s periodou $T = 0{,}50\,\mathrm{s}$ v některém okamžiku jeho toulek. Uvažujte, že rychlost zvuku je $v = 310\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a zanedbejte výšku kostela. Kiko šel na půlnoční mši.

Rolu steny, od ktorej sa odráža zvuk kostolného zvonu, si môžeme vyložiť ako druhý kostol, ktorý zvoní v rovnakom čase a nachádza sa voči prvému kostolu zrkadlovo symetricky na druhej strane steny. Pri dodržaní pevnej vzdialenosti od kostola môžeme byť stále kdekoľvek na kružnici s daným polomerom l, kde stred kružnice je totožný s polohou kostola. Minimálne časové oneskorenie počutia ozveny oproti primárnemu zvuku bude

$$\Delta t_{\min} = \frac{2h - 2l}{v}\,.$$

To nastane v situácii, keď budeme stáť medzi kostolmi. V prípade že budeme od sekundárneho kostola najďalej (teda na opačnej strane od primárneho kostola), bude časové oneskorenie maximálne

$$\Delta t_{\mathrm{max}} = \frac{2h}{v}\,.$$

Vo všetkých ostatných bodoch kružnice bude časové oneskorenie ležať medzi týmito dvoma hodnotami. Požiadavka periódy $T = 0{,}5\,\mathrm{s}$ dáva podmienku $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$. Ľahko sa presvedčíme, že keď stojíme priamo pri kostole, tak je $\Delta t > 0{,}5\,\mathrm{s}$. Postupným vzďaľovaním sa od kostola Δt_{min} klesá, až dosiahne hodnotu pol sekundy. Z prvej rovnice už ľahko vyjadríme minimálnu hodnotu vzdialenosti

$$l_{\mathrm{min}} = h - \frac{\Delta t v}{2} = 22{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha O.5 ... samomluva 5 bodů

Tomáš si na opuštěné koleji nemá s kým povídat, tak se rozhodl, že si půjde zaběhat a pobaví se sám se sebou. Postavil se $50\,\mathrm{m}$ *od osamocené velké zdi a začal mluvit a běhat rychlostí* $10\,\mathrm{km{\cdot}hour^{-1}}$ *rovnoběžne se zdí. Kromě svého vlastního hlasu však slyšel taky svou ozvěnu. Jaký byl poměr frekvencí primárního zvuku a ozvěny?* *Kiko si má s kým povídat.*

Nakoľko Tomáš beží po celý čas rovnakou rýchlosťou, pohyb vysielača a prijímača je rovnaký. V takomto usporiadaní sa podľa Dopplerovho javu frekvencia prijatého signálu z ozveny nezmení, a preto bude výsledný pomer rovný jednej. Tento výsledok si môžeme vysvetliť aj tak, že sa na problém pozrieme bez steny, ktorú nahradíme druhým bežcom s rovnakou rýchlosťou, ale za stenou. Tohto bežca ale umiestnime na zrkadlovo symetrickú pozíciu voči miestu, kde by Tomáš počul ozvenu. Takéto usporiadanie je ekvivalentné s úlohou v zadaní a evidentne zodpovedá situácii, kedy jedna bežiaca osoba hovorí niečo druhej, rovnako bežiacej osobe. Alebo ešte z iného pohľadu, stačí nám zastaviť bežcov a v opačnom smere zapnúť vietor. Rýchlosť média nám ale neovplyvní frekvenciu, preto bude pomer naozaj rovný jednej. O tomto sa môžeme ľahko presvedčiť aj vo vzťahu pre Dopplerov posun

$$f = \frac{c - v_{\mathrm{detektor}}}{c - v_{\mathrm{zdroj}}} f_0\,,$$

pričom vidíme, že jedinou podmienkou je, aby Tomáš nebežal nadzvukovou rýchlosťou.

Kristián Šalata
`kristian.salata@fykos.cz`

Úloha O.6 ... bublina v těžítku 5 bodů

Jindra byl zaujat kulovým skleněným těžítkem s poloměrem $r = 5{,}0\,\mathrm{cm}$*. V těžítku se nachází vzduchová bublinka v hloubce* $a = 3{,}0\,\mathrm{cm}$*. Jindra ji pozoruje podél spojnice oko-bublina-střed těžítka. V jaké hloubce ji Jindra vidí? Index lomu skla je* $n_{\mathrm{s}} = 1{,}52$*, index lomu vzduchu je* $n_{\mathrm{v}} = 1{,}00$*.* *Místo aby se připravoval na zkoušky, Jindra radši zkoumal bublinu.*

Pro zobrazení kulovým rozhraním se dá odvodit rovnice (v aproximaci pro malé úhly)

$$\frac{n_\mathrm{s}}{a} + \frac{n_\mathrm{v}}{a'} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{v}}{r}\,,$$

kde a' je vzdálenost obrazu bubliny od povrchu. Ta je záporná, pokud je obraz uvnitř těžítka (virtuální obraz), a kladná, pokud je obraz vně (reálný obraz). Odtud dostáváme

$$\frac{1}{a'} = \left(\frac{n_\mathrm{s}}{n_\mathrm{v}} - 1\right)\frac{1}{r} - \frac{n_\mathrm{s}}{n_\mathrm{v}}\frac{1}{a}\,,$$
$$a' \doteq -2{,}48\,\mathrm{cm}\,.$$

Jindra vnímá bublinu v hloubce 2,48 cm pod povrchem těžítka.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha T.1 ... pijeme vodu 5 bodů

Danka měla skleněnou lahev s objemem $V_\mathrm{f} = 0{,}500\,\ell$ naplněnou $V_1 = 4{,}00\,\mathrm{dl}$ vody. Přiložila si ji k ústům tak, aby se do ní nemohl dostat vzduch z okolí a vypila $V_\mathrm{o} = 2{,}00\,\mathrm{dl}$ vody, přičemž do lahve nevdechla žádný vzduch. Jak velký podtlak se v lahvi vytvořil? Předpokládejte, že děj byl rychlý, takže nedošlo k výměně tepla mezi vodou, lahví a okolím. Tlak vzduchu v lahvi je na začátku rovný atmosférickému tlaku $p_\mathrm{a} = 1\,013\,\mathrm{hPa}$. Uvažujte, že vzduch tvoří molekuly s $f = 5$ stupni volnosti. *Dance se vždycky smrskne plastová lahev.*

Keďže nedochádza k výmene tepla medzi vzduchom vo fľaši a jeho okolím, ide o adiabatický dej, pre ktorý platí $pV^\kappa = \mathrm{konst.}$ Tu κ je Poissonova konštanta, ktorá súvisí s počtom stupňov voľnosti plynu ako

$$\kappa = \frac{f+2}{f}\,.$$

Označme p_2 tlak vzduchu vo fľaši po odpití. Potom možno pre vzduch vo fľaši písať rovnicu

$$p_\mathrm{a}\left(V_\mathrm{f} - V_1\right)^{\frac{f+2}{f}} = p_2\left(V_\mathrm{f} - V_1 + V_\mathrm{o}\right)^{\frac{f+2}{f}}\,.$$

Podtlak určíme ako rozdiel tlakov pred odpitím a po ňom, teda

$$\Delta p = p_\mathrm{a} - p_2\,.$$

Vyjadrením tlaku p_2 z predposlednej rovnice, dosadením vyjadrenia do poslednej a malou úpravou dostaneme

$$\Delta p = p_\mathrm{a}\left(1 - \left(\frac{V_\mathrm{f} - V_1}{V_\mathrm{f} - V_1 + V_\mathrm{o}}\right)^{\frac{f+2}{f}}\right) \doteq 795\,\mathrm{hPa}\,.$$

Z tohto výsledku vidíme, že ak by bola fľaša naozaj dokonale utesnená, vzniknutý podtlak by bol rovný viac ako 75 % atmosferického tlaku, čo je naozaj veľa. Samozrejme, takýto podtlak sa utesnením fľaše ústami nedá dosiahnuť. Avšak aj oveľa menší podtlak, ktorý reálne vznikne, ľahko stlačí materiál obyčajnej plastovej fľaše.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha T.2 ... malé sluníčko 5 bodů

Jakou teplotu by muselo mít dokonale černé těleso, aby mělo stejný výkon jako Slunce, ale průměr rovný polovině jeho průměru $D_\odot = 1\,392\,000\,\mathrm{km}$? Výkon Slunce je $P_\odot = 3{,}826 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ a Stefan-Boltzmannova konstanta má hodnotu $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$.

Dance byla zima.

Celkovú intenzitu vyžarovania dokonale čierneho telesa $I(T)$ popisuje Stefan-Boltzmannov zákon

$$I(T) = \sigma T^4\,,$$

kde T je hľadaná teplota telesa. Aby sme získali výkon, musíme ešte intenzitu prenásobiť plochou povrchu telesa

$$S = \pi D^2\,.$$

Vychádzame teda z rovnice $P_\odot = P$, ktorú môžeme podľa predchádzajúcich vzťahov prepísať do tvaru

$$P_\odot = \pi D^2 \sigma T^4 \,.$$

Dosadíme $D = D_\odot/2$, úpravami vyjadríme T a dostávame

$$T = \sqrt[4]{\frac{4P_\odot}{\pi\sigma D_\odot^2}} \doteq 8\,160\,\mathrm{K}\,.$$

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha T.3 ... zjednodušený model balónu 5 bodů

Představme si balónek s hmotností $m = 25\,\mathrm{g}$ a velmi tenkými stěnami, který funguje tak, že rozdíl tlaku uvnitř a vně něj je $\Delta p = 10\,\mathrm{kPa}$. Dáme do něj $n = 1{,}0\,\mathrm{mol}$ vzduchu. Na jakou teplotu musíme tento vzduch zahřát, aby se balónek vznášel, pokud jsou venku normální atmosférické podmínky? Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn a jeho molární hmotnost je $M = 28{,}96\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. *Legolas létá hlavou v oblacích.*

Priamo zo zadania vyplýva, že vnútri balónku bude tlak $p = p_\mathrm{a} + \Delta p$. Môžeme teda veľmi jednoducho dorátať jeho objem

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT}{p_\mathrm{a} + \Delta p}\,,$$

nakoľko objem samotného balónka zanedbávame – je to zároveň objem vytlačeného vzduchu. Nás bude prirodzene zaujímať, koľko mólov vzduchu sme takto vytlačili

$$n_V = \frac{p_\mathrm{a} V}{RT_\mathrm{a}} = n\frac{p_\mathrm{a} T}{(p_\mathrm{a} + \Delta p)\,T_\mathrm{a}}\,.$$

Zostáva nám uvedomiť si, že hmotnosť z molárneho množstva dostaneme jednoducho vynásobením molárnou hmotnosťou a netreba zabudnúť, že vzduch v balóne tiež niečo váži. Potom z rovnosti tiažovej a vztlakovej sily dostávame

$$\begin{aligned} F_g &= F_\mathrm{vz}\,,\\ g\,(m + Mn) &= gMn_V\,,\\ m + Mn &= Mn\frac{p_\mathrm{a} T}{(p_\mathrm{a} + \Delta p)\,T_\mathrm{a}}\,,\\ T &= T_\mathrm{a}\left(1 + \frac{m}{Mn}\right)\left(1 + \frac{\Delta p}{p_\mathrm{a}}\right) \doteq 600\,\mathrm{K}\,. \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že teplotu ovplyvňuje pomer hmotnosti obalu balónka a množstva vzduchu v ňom. Tento pomer sa so zväčšovaním balónka zmenšuje (hmotnosť obalu rastie kvadraticky s rozmerom, množstvo uzatvoreného vzduchu kubicky), preto v prípade veľkých balónov nie je nutné vzduch zahrievať na tak vysoké teploty.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha T.4 ... horký míč 5 bodů

Fotbalový míč s průměrem $d = 20{,}0\,\mathrm{cm}$ a s teplotou $t_0 = 20{,}0\,{}^\circ\mathrm{C}$ položíme za slunečného dne před dům. Míč má tepelnou kapacitu $C = 500\,\mathrm{J{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ a pohltí $\eta = 40\,\%$ světelné energie, která na něj dopadá ze Slunce. Zářivý tok ze Slunce dopadající na plochu před domem je $\Phi = 600\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. Kolikrát se změní tlak vzduchu v míči po půl hodině na slunci? Předpokládejte, že míč nemění svoji velikost a je dostatečně tepelně izolován od okolí. Zanedbejte tepelné ztráty vyzařováním. *Danka zapomněla míč na slunci.*

Za čas $\tau = 1\,800\,\mathrm{s}$ pohltí lopta energiu

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\eta\Phi\tau\,.$$

Teplota lopty sa počas toho zvýši o

$$\Delta T = \frac{Q}{C}\,.$$

Zo stavovej rovnice ideálneho plynu pre izochorický dej (pri stálom objeme) platí

$$\frac{p}{T} = \mathrm{konst}\,,$$

kde T je termodynamická teplota. Potom pre pomer tlakov dostávame

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = 1 + \frac{\pi d^2\eta\Phi\tau}{4CT_0} \doteq 1,09\,.$$

Tlak vzduchu v lopte sa zväčší 1,09-krát. V skutočnosti sa tlak v lopte zvýši menej vplyvom výmeny tepla s predmetmi v okolí a okolitým vzduchom a naviac asi 10 % dopadajúcej energie sa späť vyžiari.

Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha T.5 ... snídaně v Dukovanech 5 bodů

Kolik gramů ^{238}Pu bychom potřebovali, abychom si v přírodě mohli k snídani uvařit 300 ml čaje za tři minuty? Původní teplota vody je $\theta_0 = 15\,{}^\circ\mathrm{C}$ a uvažujme, že umíme využít 80 % energie z rozpadu. Izotop ^{238}Pu má poločas rozpadu 87,7 let a rozpadá se přeměnou α se střední energií 5,593 MeV. *Jarda chtěl jet tábořit, ale nechtěl si brát těžký batoh.*

Pro počet jader v závislosti na čase platí vztah

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

kde N_0 je počáteční počet jader, $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ je rozpadová konstanta a T poločas rozpadu. Absolutní hodnotou z derivace tohoto vztahu podle času dostáváme aktivitu (počet rozpadů za sekundu), která je

$$A = N_0\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{N_0 \ln 2}{T}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

kde jsme použili absolutní hodnotu, abychom získali „počet“ – jinak by číslo bylo záporné, protože jde o úbytek. Vynásobíme-li aktivitu energií jednoho rozpadu a účinností $\eta = 0{,}8$, získáme výkon, kterým se ohřívá voda. Ta za čas $t = 3\,\mathrm{min} = 180\,\mathrm{s}$ přijme $Q = mc\Delta T = mc\left(\theta_\mathrm{v} - \theta_0\right)$, kde $m = 0{,}3\,\mathrm{kg}$, $c = 4\,200\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ je měrná tepelná kapacita vody a $\theta_\mathrm{v} = 100\,{}^\circ\mathrm{C}$ je bod varu vody. Jelikož $t \ll T$, můžeme aproximovat $\mathrm{e}^{-\lambda t} \approx 1$ a považovat tak aktivitu za konstantní (jinak bychom museli integrovat aktivitu přes čas – ne že by ten integrál byl těžký, ale proč si to komplikovat). Z těchto informací dostáváme rovnici

$$E\eta N_0 \frac{\ln 2}{T} = \frac{mc\left(\theta_\mathrm{v} - \theta_0\right)}{t}\,,$$

ze které vyjádříme počet jader

$$N_0 = \frac{mc\left(\theta_\mathrm{v} - \theta_0\right) T}{\eta E t \ln 2} \doteq 3{,}312 \cdot 10^{24}\,.$$

Hmotnost jednoho molu $^{238}\mathrm{Pu}$ je $M = 238{,}05\,\mathrm{g}$. Potřebujeme tedy

$$m = \frac{N_0 M}{N_\mathrm{A}} = 1\,309\,\mathrm{g}\,.$$

Vidíme, že ke generování téměř 600 W nám stačí jen 1,3 kg materiálu. To není mnoho. Toho se v praxi skutečně využívá v tzv. radioizotopových termoelektrických generátorech (RTG). Přímo $^{238}\mathrm{Pu}$ používají (či používaly) např. rover Curiosity, sondy Cassini, New Horizons nebo lunární moduly z programu Apollo. Pro RTG je obecně potřeba izotopů, které emitují částice o dostatečné energii, mají optimální poločas rozpadu (příliš krátký by znamenal, že se zdroj rychle rozpadne a za chvíli nám nic nezbude, příliš dlouhý by zase emitoval málo záření a k získání rozumného výkonu bychom potřebovali příliš velké množství). Dále je potřeba, aby se emitované záření dalo rychle zabrzdit – pokud by zabržděno nebylo, emitovala by se energie do okolí a generátor by jednak byl neúčinný, jednak by zářením ohrožoval posádku či přístroje. Částice α je velká a těžká, proto se v materiálu absorbuje velmi rychle. Díky tomu rozpadové teplo zůstává v materiálu a peleta $^{238}\mathrm{Pu}$ se sama může nahřát na několik set °C.

Na závěr je nutno zmínit, že ke každému zářiči je třeba se chovat podle zásad radiační ochrany. To mimo jiné zahrnuje, že zářiče by se měly používat jen tam, kde to má nějaký pozitivní přínos a neexistuje bezpečnější volba. Naše úloha byla čistě didaktická – mnohem lepší alternativa na cesty je malý plynový vařič.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha T.6 ... kmitající píst (5 bodů)

Mějme izolovaný ležící válec délky $2l = 2{,}0\,\mathrm{m}$ s konstantním průřezem $S = 100\,\mathrm{cm}^2$. Vložíme do něj přepážku s hmotností $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ a na obě její strany umístíme $N = 10^{23}$ molekul ideálního plynu s Poissonovou konstantou $\kappa = 5/3$. Tlak se ustálí na hodnotě $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$. Jaká bude perioda malých kmitů této přepážky? *Lego má rád malé ... kmity.*

Valec je izolovaný, takže termodynamické deje v ňom budú zrejme adiabatické. Pre takéto deje platí $pV^\kappa = \text{konst.}$ Nakoľko na oboch stranách prepážky je rovnaké množstvo plynu, jej rovnovážna poloha bude zrejme uprostred. Potom môžeme spočítať, ako sa zmení tlak v komorách, keď sa prepážka posunie o velmi malé x. Z rovnice $p_0 V_0^\kappa = p_x V_x^\kappa$ si vyjádříme

$$p_x = p_0 \frac{V_0^\kappa}{V_x^\kappa} = p_0 \frac{S^\kappa l^\kappa}{S^\kappa \left(l + x\right)^\kappa} = p_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-\kappa} \approx p_0 \left(1 - \kappa \frac{x}{l}\right)\,.$$

Nesmieme zabúdať, že v druhej polovici sa tlak zmení tiež, akurát voči tej sa prepážka posunula opačným smerom. Čiže tlak tam získame rovnako, len musíme zameniť $x \to -x$. Potom si môžeme spočítať veľkosť výslednej sily, ktorá na prepážku pôsobí po vychýlení o x z rovnovážnej polohy

$$F_x = S\Delta p_x = S\left(p_0\left(1 - \kappa\frac{x}{l}\right) - p_0\left(1 + \kappa\frac{x}{l}\right)\right) = -\frac{2\kappa S p_0}{l}x\,.$$

Skontrolujme ešte pre istotu jej smer. V tej polovici, do ktorej sa prepážka posunula, tlak zrejme vzrástol (čiže na prepážku teraz tlačí viac), naopak, v tej druhej klesol, takže sila skutočne pôsobí proti smeru vychýlenia a dôjde k malým kmitom.

Zostáva si už len uvedomiť, že pre tuhosť k lineárneho harmonického oscilátora platí $F = -kx$. Môžeme teda stotožniť $k = 2\kappa S p_0/l$. Dosadíme do vzorca pre periódu malých kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2\kappa S\, p_0}} \doteq 0{,}15\,\mathrm{s}\,.$$

Všimnime si, že sme nikde vo výpočte nevyužili ani samotné množstvo plynu v trubici, ani jeho teplotu.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha T.7 ... báňský jed — 5 bodů

Ve válcové nádobě výšky $H = 100\,\mathrm{m}$ a poloměru $r = 20\,\mathrm{m}$ je uzavřený vzduch o objemovém složení $78\,\%$ dusíku, $21\,\%$ kyslíku a $1\,\%$ argonu při teplotě $T = 27\,^\circ\mathrm{C}$ a tlak uprostřed nádoby je $p = 1\,013\,\mathrm{hPa}$. V nádobě spálíme jisté množství čistého uhlíku, čímž přeměníme přesně třetinu molekul kyslíku na oxid uhličitý. Určete poměr látkových koncentrací molekul kyslíku a oxidu uhličitého na dně nádoby poté, co se ustálí teplota na původní hodnotě a soustava se dostane do rovnováhy. *Dodo spí na horní posteli.*

Prvým dôležitým faktorom je uvedomiť si, že plyny sa v nádobe rozložia nezávisle na sebe.[4] Každý z plynov sa v nádobe rozloží v rovnováhe podľa Boltzmannovho rozdelenia

$$c(h) = c_0 \mathrm{e}^{-\frac{E_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B}T}} = c_0 \mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_\mathrm{B}T}}\,,$$

kde m je hmotnosť molekuly plynu, c_0 je koncentrácia na dne nádoby a $c(h)$ je koncentrácia vo výške h. Tento vzťah je možné odvodiť, napríklad aj pre vývoj tlaku s výškou z rovnice hydrostatickej rovnováhy

$$\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}h$$

a stavovej rovnice ideálneho plynu

$$p = \frac{\rho}{M}RT\,.$$

Hodnotu koncentrácie na dne určíme z podmienky na celkový látkový obsah plynov

$$n = \int_0^H Sc(h)\,\mathrm{d}h = Sc_0\frac{k_\mathrm{B}T}{mg}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_\mathrm{B}T}}\right)\,,$$

$$c_0 = \frac{nmg}{Sk_\mathrm{B}T}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_\mathrm{B}T}}\right)^{-1} \approx \frac{nmg}{Sk_\mathrm{B}T}\left(\frac{mgH}{k_\mathrm{B}T} - \frac{1}{2}\left(\frac{mgH}{k_\mathrm{B}T}\right)^2\right)^{-1} = \frac{n}{SH}\left(1 - \frac{mgH}{2k_\mathrm{B}T}\right)^{-1}\,,$$

[4] Považujeme ich za ideálne plyny.

kde sme využili aproximáciu $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Tento vzťah platí pre každý z plynov zvlášť. Nech index c^k označuje kyslík, c^o oxid uhličitý a c^u uhlík. Pre hľadaný podiel potom máme

$$\frac{c_0^\mathrm{k}}{c_0^\mathrm{o}} = \frac{\frac{n^\mathrm{k}}{SH}\left(1 - \frac{m^\mathrm{k} gH}{2k_\mathrm{B}T}\right)^{-1}}{\frac{n^\mathrm{o}}{SH}\left(1 - \frac{m^\mathrm{o} gH}{2k_\mathrm{B}T}\right)^{-1}} = \frac{n^\mathrm{k}}{n^\mathrm{o}} \frac{1 - \frac{m^\mathrm{o} gH}{2k_\mathrm{B}T}}{1 - \frac{m^\mathrm{k} gH}{2k_\mathrm{B}T}} \approx \frac{n^\mathrm{k}}{n^\mathrm{o}} \left(1 - \frac{m^\mathrm{o} gH}{2k_\mathrm{B}T}\right)\left(1 + \frac{m^\mathrm{k} gH}{2k_\mathrm{B}T}\right) \approx$$

$$\approx \frac{n^\mathrm{k}}{n^\mathrm{o}} \left(1 - \frac{\left(m^\mathrm{o} - m^\mathrm{k}\right) gH}{2k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{n^\mathrm{k}}{n^\mathrm{o}} \left(1 - \frac{m^\mathrm{u} gH}{2k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{n^\mathrm{k}}{n^\mathrm{o}} \left(1 - \frac{M^\mathrm{u} gH}{2RT}\right) .$$

Po dosadení za molárnu hmotnosť uhlíka $M^\mathrm{u} = 12\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ dostávame

$$\frac{c_0^\mathrm{k}}{c_0^\mathrm{o}} \doteq 2\left(1 - 0{,}002\,36\right) \doteq 1{,}995\,3\,.$$

Výsledok sa môže zdať prekvapivý – na školách sa bežne ukazujú experimenty, pri ktorých sa prelieva oxid uhličitý z nádoby do nádoby. Ak by sme ale ponechali takýto oxid uhličitý dosť dlho osamote, difúzia by vykonala svoju úlohu a tepelným pohybom by rozniesla oxid uhličitý aj do vyšších polôh.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

www: `https://fyziklani.cz`
e-mail: `fyziklani@fykos.cz`

Soutěž Fyziklání vám přináší FYKOS.

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
https://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.